2000/03/04/19:30~

Furuta

目標. Donaldson不変量をdefする.

- Introduction(準備)
- Uhlenbeckの定理
- Donaldson不変量のdef

線型作用素の例

X: 2 dim oriented closed manifold

$\Omega^i := \Gamma(\Lambda^i T^*X)$

$d : \Omega^i \to \Omega^{i+1}$ $\quad d^2 = 0$

$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \to 0$

"主表象" $\quad \boxed{\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}}$ の主表象

$(v_1\, v_2\, v_n) \mapsto \sum a_i v_i$

$\in T^*X$ $\quad$ local coodinate

$x \in X$ のnbdでlocal coordをとる.

$(T^*X)_x = \mathbb{R}^2 \ni (0,1) \leftarrow (v_1 \cdots v_n)$

主表象 $\sigma(d)$

$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\sigma(d)_{(0,1)}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sigma(d)_{(0,1)}} \mathbb{R} \to 0$ exact!!

$1 \mapsto (0,1)$

$(x, y) \mapsto x$ $\quad$ elliptic.

Furuta

$$0 \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to \Omega^2 \to 0$$

$$\mathbb{H}^0 \quad \mathbb{H}^1 \quad \mathbb{H}^2$$

$$\mathbb{H}^i = \frac{\ker d|\Omega^i}{\mathrm{Im}\, d|\Omega^{i-1}}$$ とおく.

<u>Fact</u> elliptic $\Rightarrow$ $\dim \mathbb{H}^i < +\infty$

(1) index theorem

$$\dim \mathbb{H}^0 - \dim \mathbb{H}^1 + \dim \mathbb{H}^2 = \int_X e(X)$$

Euler class

(2) de Rham Theory $\mathbb{H}^i = H^i_{DR}(X)$

これらの"非線型化"は?

<u>結論</u> $\mathcal{G} \curvearrowright (\mathcal{A} \longrightarrow V)$

∞ dim grp ∞ dim mfd ∞ dim vect. sp.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{G} \to \mathcal{A} \\ g \mapsto gA \\ \text{eでブンate} \end{array}}$$

$$\begin{tikzcd}
(T\mathcal{G})_e \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & \Omega^0 \arrow[d, "d"] \\
(T\mathcal{A})_A \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "A\in\mathcal{A}"] & \Omega^1 \arrow[d, "d"] \\
V \arrow[r, phantom, "="] & \Omega^2
\end{tikzcd}$$

"df"

Furuta

☆ $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{V}$ 等のせつめい
☆ X: 4 dim のときに似たことを考える.
☆ $\mathcal{G} \curvearrowright (\mathcal{A} \to \mathcal{V})$ の有限次元の toy model をせつめい.
☆ 無限次元でどんな困難が生じるか? その解決のし方
☆ → Donaldson inv が def できる.

	dim X	複体の長さ	不変量
Gromov-Witten	2	2	GW inv 各シンプレクティック多様体ごとに
2-dim Yang-Mills	2	2 (or 3)	曲面上の平坦束の moduli space の cohomology のコウゾウ
Casson Taubes	~~3 (or 2)~~ 3	3 (or 2)	Casson inv.
SW theory	4	3	SW inv
D theory	4	3	D inv.

本質的に SO(3) SU(2) のときのみ理論らしい理論が出来ている.

固定

- G cpt Lie grp ($U(n)$, $SU(n)$)
- $P \xrightarrow{G\text{主}} X$ 2-dim

$\bigcup U_\alpha \times G \to \bigcup U_\alpha$

$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$

$U_\alpha \times G \supset U_{\alpha\beta} \times G$

$\downarrow$

$U_\beta \times G \supset U_{\alpha\beta} \times G$

$(x, g) \mapsto (x, f_{\beta\alpha} g)$

$f_{\alpha\alpha} = 1$

$f_{\beta\alpha} = f_{\alpha\beta}^{-1}$

$f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha} f_{\alpha\beta} = 1$

Furuta

$$0 \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to \Omega^2 \to 0$$

☆ Ω^0のかわりは？ $= \boxed{\text{ゲージ群}} = \mathcal{G}$

$$\hat{G} = P \times_{Ad} G$$

$\downarrow$

X のSection全体

$$P \times_{Ad} G = \cup U_\alpha \times G$$

$$U_\alpha \times G \supset U_{\alpha\beta} \times G \quad (x, g)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$U_\beta \times G \supset U_{\alpha\beta} \times G \quad (x, f_{\beta\alpha} g f_{\beta\alpha}^{-1})$$

$g \in \Gamma(\hat{G})$

$g = \{ g_\alpha : U_\alpha \to G \text{ s.t. } f_{\beta\alpha} g_\alpha f_{\beta\alpha}^{-1} = g_\beta \text{ on } U_{\alpha\beta} \}$

$\mathcal{G}$は群となる。 $\hat{\mathfrak{g}} = P \times_{ad} \mathfrak{g}$ とすると

$\downarrow$

X

$\Gamma(\hat{\mathfrak{g}})$ は $\Gamma(\hat{G})$ の(formalな) Lie alg.

$\Gamma(\hat{\mathfrak{g}}) = \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}})$, $\Gamma(\hat{G}) = \mathcal{G}$

☆ Ω^1のかわりは？ $\boxed{\text{接続の空間}} = \mathcal{A}$

$$C = \cup T^* U_\alpha \otimes \hat{\mathfrak{g}}$$

C $\downarrow$ のsection全体

X

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$X = \cup U_\alpha$$

$$T^* U_\alpha \otimes \hat{\mathfrak{g}} \supset T^* U_{\alpha\beta} \otimes \hat{\mathfrak{g}} \qquad a$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$T^* U_\beta \otimes \hat{\mathfrak{g}} \supset T^* U_{\alpha\beta} \otimes \hat{\mathfrak{g}} \qquad f_{\beta\alpha} a f_{\beta\alpha}^{-1} - (d f_{\beta\alpha}) a$$

$\mathcal{A}$

$\Gamma(T^*X\otimes\hat{\mathfrak{g}})$, $\underbrace{\Gamma(C)}_{\substack{\Psi \\ A_0}}$ の内容は？

A_0 をひとつとると

他の要素は　$A_0+\Gamma(T^*X\otimes\hat{\mathfrak{g}})$

local cood で

$(T\mathcal{A})_A=\Omega^1(\hat{\mathfrak{g}})$

Fact　$\mathcal{G}\curvearrowright\mathcal{A}$

$g=\{g_\alpha\}$　$A=\{A_\alpha\}$

$gA=\{g_\alpha A_\alpha g_\alpha^{-1}-dg_\alpha g_\alpha^{-1}\}$

ここの理解のしかた

(#) A_α のかわりに operator 「$d+A_\alpha$」を考えよ

$A\in\mathcal{A}$　$\mathcal{G}\to\mathcal{A}$　の $e\in\mathcal{G}$ における ビブン

$g\mapsto gA$

$(T\mathcal{G})_e\to(T\mathcal{A})_A$

$a_\alpha\mapsto\underbrace{[a_\alpha,A_\alpha]-da_\alpha}_{\substack{\shortparallel \\ -d_Aa}}$

$\Omega^i(\hat{\mathfrak{g}})\xrightarrow{d_A}\Omega^{i+1}(\hat{\mathfrak{g}})$

$a_\alpha\mapsto da_\alpha+[A_\alpha,a_\alpha]$

(#) を $g_\alpha=\exp t h_\alpha$ とおいて t について ビブン

Furuta

☆ Ω^2にあたるものは？ $V = \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$ ↑ $\Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$ 曲率の入る所

$\mathcal{A} \ni A = \{A_\alpha\} \mapsto F_A = \{dA_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha]\}$ $\in \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$

曲率

Fact $\Omega^i(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{d_A} \Omega^{i+1}(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{d_A} \Omega^{i+2}(\hat{\mathfrak{g}})$

$a \longmapsto [F_A \wedge a]$

$\mathcal{A} \longrightarrow V$

$A \longmapsto F_A$

の微分は？ 答 d_A.

$\mathfrak{h}$にA_α ~~+~~ ta_αを代入して微分せよ！！

$a_\alpha \mapsto \boxed{da_\alpha + [A_\alpha, a_\alpha]} = d_A a$

$(T\mathcal{A})_A \xrightarrow[\text{の微分}]{A \mapsto F_A} V$

$\| \qquad\qquad \|$

$\Omega^1(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow[d_A]{} \Omega^2(\hat{\mathfrak{g}})$

Fact $\mathcal{A} \to V$ は $\mathcal{G}$同変.

Furuta

7/8

nonlinear ef 微分作用素

$$\mathcal{G} \circlearrowright (\mathcal{A} \xrightarrow{f} V) \quad V \ni 0$$

$$\mathcal{M} := \frac{f^{-1}(0)}{\mathcal{G}} \subset \mathcal{A}/\mathcal{G}$$

- もし、$\mathcal{M}$が有限コの点で ori' なら符号つきでコスウを数えられる。
- もし、$\mathcal{M}$が ori cl. mfd なら $[\mathcal{M}] \in H_*(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ コレは不変量としてdefできる。

今の場合 $\mathcal{M} = \{A \mid F_A = 0\}/\mathcal{G}$

$= P$上の flat connection の moduli sp.

(cf. $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^c$ $\mathcal{M} \doteqdot \mathcal{A}/\mathcal{G}^c$
差がある か… それを detect できる。)

. X 4dim a c I (ori')

X: Riemannian metric をひとつ fix する

$$*: \Lambda^2 T^*X \to \Lambda^2 T^*X$$

$$e_1 \wedge e_2 \mapsto e_3 \wedge e_4$$

$$\Lambda^2 T^*X \xrightarrow{p_\pm} \Lambda^\pm := \{v \mid *v = \pm v\}$$

$$a \mapsto \frac{a \pm *a}{2}$$

$$a = p_+ a + p_- a \qquad \Omega^\pm = \Gamma(\Lambda^\pm)$$

$$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{p_+ d} \Omega^+ \to 0 \quad \to \text{elliptic}$$

$$(0 \to \Omega^2 \to \Omega^3 \to \Omega^4 \to 0)$$

Furuta

local coord

$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \to 0$ exact!

さっきの V として $\Omega^+(\hat{\mathfrak{g}})$

$$\mathcal{A} \to V$$
$$A \mapsto P_+ F_A$$

をとると

$$\mathcal{G} \curvearrowright (\mathcal{A} \xrightarrow{f} V)$$

$\downarrow$ ビブン

$$0 \to \Omega^0(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{d_A} \Omega(\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{P_+ d_A} \Omega^+(\hat{\mathfrak{g}}) \to 0.$$

朝 0800 − 0900

昼 1200 − 1300

夕 1800 − 1900