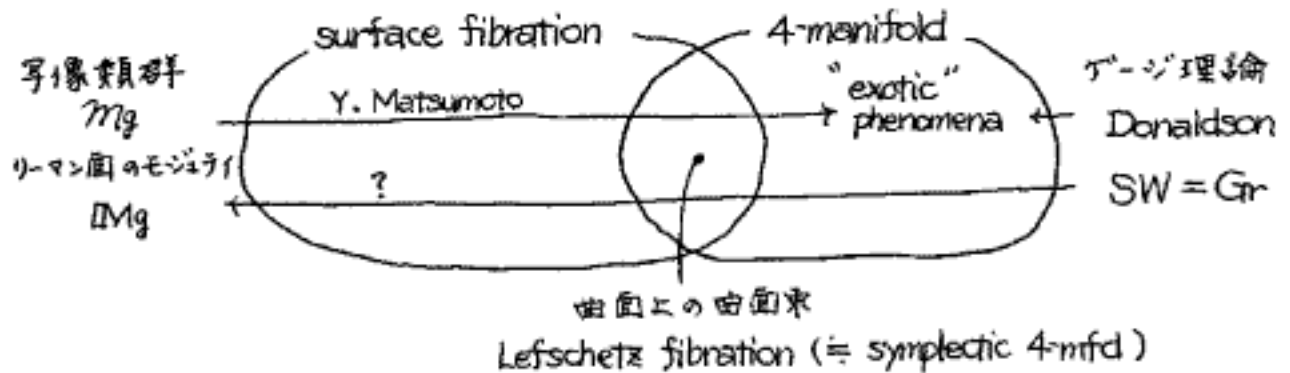


「曲面束の幾何と符号数」(第1日)

東工大理工 遠藤 久 題

§1 序



- "→"
- Y. Matsumoto, T. Fuller ... exotic な $g=2$ LF
 - E. - Korkmaz - Kotschick - Ozbagci - Stipsicz
... 符号数が0でない曲面束の構成 (← Mg の表示)
 - Y. Matsumoto, E. ... 特異ファイバーの局所符号数
- "←"
- D. Kotschick - E. ... Mg の純代数的な性質 (← $SW \Leftrightarrow Gr$, Grompf)

§2 符号数と Meyer の符号数コサイクル

• 交叉形式

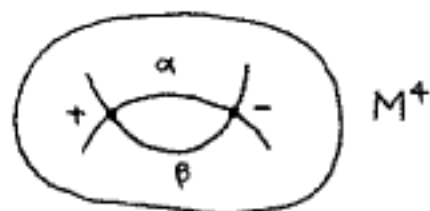
M^4 : connected oriented closed (C^∞) 4-mfd

• $H^2(M, \mathbb{Z}) / \text{Tor} \times H^2(M, \mathbb{Z}) / \text{Tor} \longrightarrow \mathbb{Z}$: 交叉形式

$$\begin{array}{ccc}
 \uparrow & & \uparrow \\
 & (\alpha, \beta) & \longrightarrow & \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle \\
 & & & \downarrow \\
 & & & \alpha \cdot \beta
 \end{array}$$

Poincaré duality \Rightarrow 非退化

$H_2(M; \mathbb{Z})$ でみると
"intersection number"



• 符号数

$$M : 4\text{-dim.} \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \text{ (対称)}$$

\Rightarrow すべての固有値は実数で、0でない

$$\begin{aligned} \sigma(M) = \text{Sign}(M) &:= \text{sign}(H^2(M, \mathbb{Z})/\text{Tor}, \cdot) \\ &= \#(\cdot \text{の正の固有値}) - \#(\cdot \text{の負の固有値}) \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ b_2^+ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \uparrow \\ b_2^- \end{matrix} \end{aligned}$$

: M の符号数

$$\rightarrow b_2(M) = b_2^+ + b_2^-, \quad \sigma(M) = b_2^+ - b_2^- = \frac{1}{3} P_1(M)$$

\uparrow
Hirzebruch

★ $\partial M \neq \emptyset$ のときも " \cdot " や " $\sigma(M)$ " は定義できる。
 \uparrow
一般に退化する

Thm (Novikov additivity)
 M_1, M_2 : oriented 4-mfds, $\partial M_1 = \partial M_2$
 $\Rightarrow \text{Sign}(M_1 \cup_{\partial} M_2) = \text{Sign}(M_2) + \text{Sign}(M_1)$

• 曲面束

$$\Sigma_g := \text{[Diagram of a genus } g \text{ surface bundle: a horizontal oval with } g \text{ vertical circles inside, connected by a horizontal line with } g \text{ dots above it.]}$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \rightarrow & M^4 \\ & & \downarrow \\ & & B^2 \leftarrow 2\text{-mfd (曲面)} \end{array} \quad ; \text{ ファイバ-束 (曲面上の曲面束)}$$

問1 $\text{Sign}(M^4) = ?$



B をパンツに分解可能
 $S^2 - \bigsqcup_{i=1}^3 D_i^2$

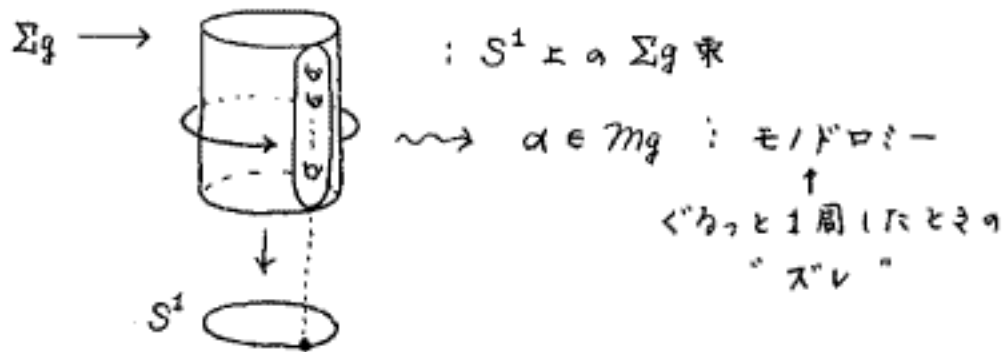
問2

$$\text{Sign} \left(\begin{array}{c} \Sigma_g \rightarrow M^+ \\ \downarrow \\ P \end{array} \right) = ?$$

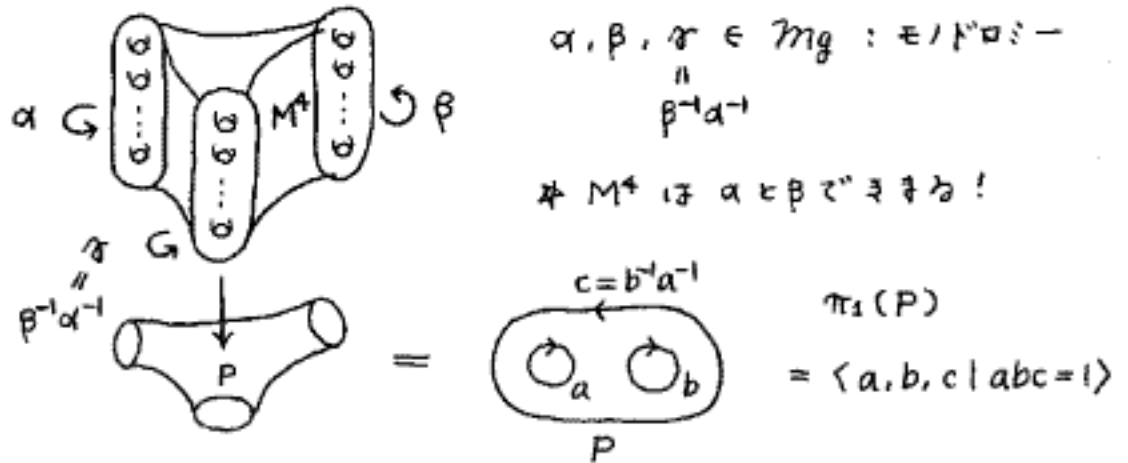
答 ？ = Meyer の符号数コサイクル

• モノドロミー

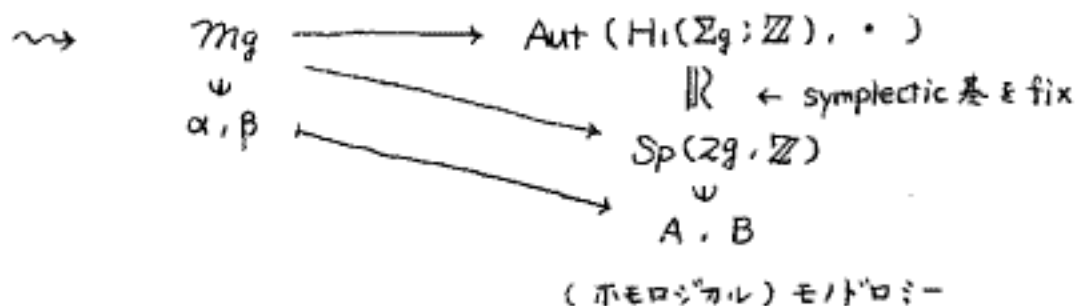
$\mathcal{M}_g := \text{Diff}^+ \Sigma_g / \text{isotopy}$: Σ_g の写像類群



パンツ P 上の Σ_g 束だ」と...



$\mathcal{M}_g \curvearrowright H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$: 自然な作用



• 特性準同型 (モロロミ- a "逆")

$$\begin{array}{ccc}
 M^4 & \dashrightarrow & \text{EDiff} + \Sigma_g & : \text{普通束} \\
 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow & \\
 P & \xrightarrow{\text{分類写像}} & \text{BDiff} + \Sigma_g & : \text{分類空間}
 \end{array}$$

π_1 への誘導

$$\begin{array}{ccc}
 \chi : \pi_1(P) & \rightarrow & \pi_1(\text{BDiff} + \Sigma_g) \cong \pi_0(\text{Diff} + \Sigma_g) = \mathcal{M}_g \\
 \parallel & & \downarrow \\
 \langle a, b, c \mid abc = 1 \rangle & & \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \\
 : \text{特性準同型} & &
 \end{array}$$

★ だいたい $\chi(a) = A^{-1}, \chi(b) = B^{-1}$ となっている。

• 符号数コサイクル (問2の答え)

$$(H^2(M^4, \mathbb{Z}), \cdot) \cong (H^1(P, \partial P; \underbrace{H_1(\Sigma_g; \mathbb{R})}_{\Gamma}, \langle, \rangle)$$

\uparrow Serre λ ベクトル系 \uparrow 局所係数の単体的コサイクル
 \uparrow Γ の双線型形式

$$\Gamma(p) := \mathbb{R}^{2g} \quad (p \in P)$$

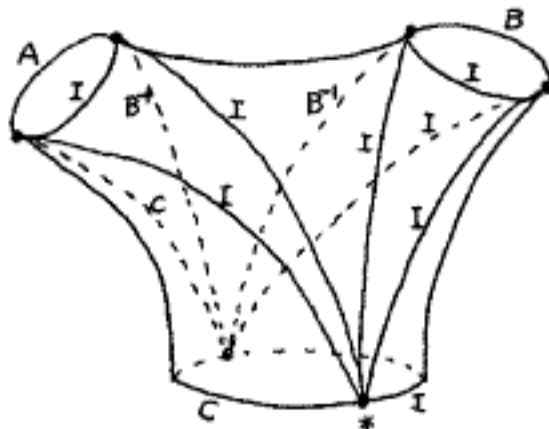
$$\Gamma(p, q) := \chi(\gamma_p \gamma_q) \quad (\gamma_p: \text{基点 } p \text{ と } q \text{ までの path})$$

$$\begin{aligned}
 C^m(P, \partial P; \Gamma) &:= \{ f : \{n\text{-単体 } S = \{v_0, \dots, v_n\}\} \rightarrow \Gamma \\
 &\quad \mid f(S) \in \Gamma(v_0), S \subset \partial P \Rightarrow f(S) = 0 \}
 \end{aligned}$$

$$\delta : C^m \rightarrow C^{m+1}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta f)(v_0, \dots, v_{m+1}) &:= \Gamma(|v_1 v_0|)^{-1} f(v_1, \dots, v_{m+1}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i f(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{m+1})
 \end{aligned}$$

実際は P を次のように分割し、局所係数をつくる。



$$\begin{aligned}
 A, B, C &\in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \\
 C &= B^{-1}A^{-1}
 \end{aligned}$$

$$C^0 = \{0\} \text{ 外り } \quad H^1(P, \partial P; \Gamma) \cong \mathbb{Z}^1(P, \partial P; \Gamma)$$

$$f: \{s_1, s_2, \dots, s_{15}\} \longrightarrow \Gamma = \mathbb{R}^{2g} \quad ; \quad 1\text{-コフェイン}$$

↑
P の 1 単体たち ($s_1, \dots, s_6 \subset \partial P$)

- 境界条件 : $s_1, \dots, s_6 \longmapsto 0$
- コサイクル条件 $\delta^1 f = 0$: s_7, s_8 の行き先と s_9, \dots, s_{15} の行き先はそれぞれ、 s_7 と s_8 の間に非自明な relation が 1 つあり

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \mathbb{Z}^1(P, \partial P; \Gamma) & \xleftarrow{\text{ } s_7, s_8 \text{ の行き先}} \\ & \cong V_{A,B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} \mid (A^{-1} - I)x + (B - I)y = 0\} \end{aligned}$$

同様に \langle, \rangle_P は $V_{A,B}$ 上の次の双線型形式に対応。

$$\begin{array}{ccc} \langle, \rangle_{A,B} : V_{A,B} \times V_{A,B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y), (x', y') & \longmapsto & \tau(x+y)J(I-B)y' \end{array}$$

Thm (Meyer)

$$(H^2(M^+, \mathbb{Z}), \cdot) \cong (V_{A,B}, \langle, \rangle_{A,B})$$

$$\text{特に, } \text{Sign} \left(\begin{array}{c} \Sigma_g \rightarrow M^4 \\ \downarrow \\ P \end{array} \right) = \text{sign}(V_{A,B}, \langle, \rangle_{A,B})$$

!!
 $\tau_g(A, B)$

* τ_g は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の 2-コサイクル (符号数コサイクル)

コサイクル条件

$$\begin{aligned} \tau_g(A, B) + \tau_g(AB, C) \\ = \tau_g(A, BC) + \tau_g(B, C) \end{aligned}$$



局所係数 Novikov 加法性



• 符号数コサインクルの具体例 ($g=1$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{"90° 回転"} \quad \begin{matrix} m \mapsto -l \\ l \mapsto m \end{matrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{hyperelliptic involution}$$



$$V_{A,B} = \left\{ (\underbrace{x_1, x_2}_x, \underbrace{y_1, y_2}_y) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -y_1 + y_2, \quad x_2 = -y_1 - y_2$$

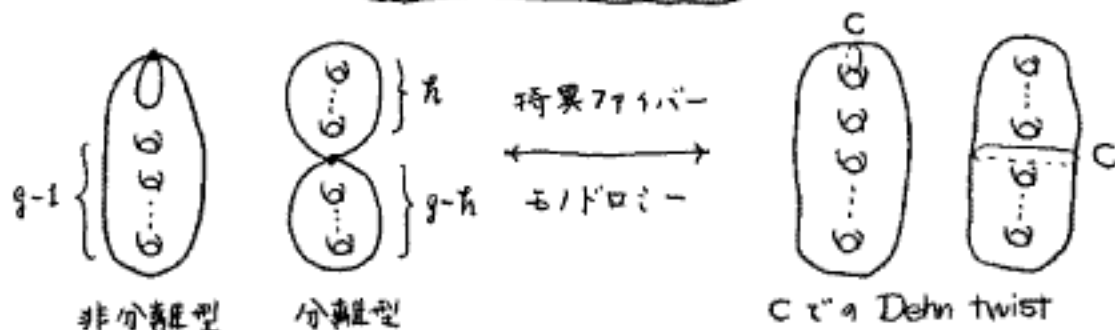
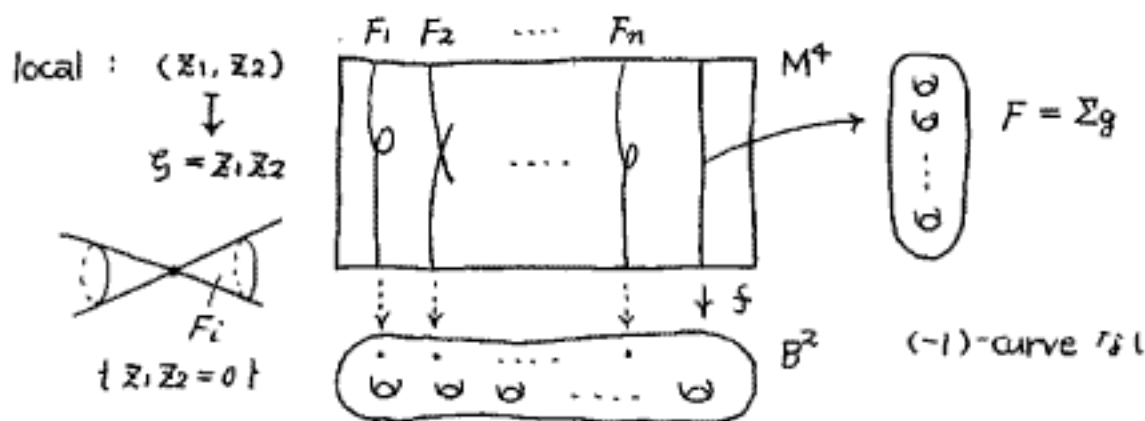
$$\begin{aligned} \langle (\alpha, \gamma), (\alpha', \gamma') \rangle_{A,B} &= {}^t(\alpha + \gamma) J (I - B) \gamma' \\ &= (\alpha_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \gamma_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} \\ &= 2\gamma_1 \gamma'_1 + 2\gamma_2 \gamma'_2 \\ &= (\gamma_1, \gamma_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

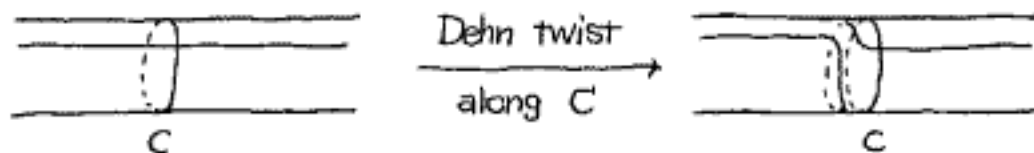
$$\therefore \tau_1(A, B) = +2$$

§ 3 Lefschetz fibration (LF)

• Lefschetz fibration

$f: M^4 \rightarrow B^2$: proper C^∞ -surjection w. / w.o. ∂





- ★ 複素座標 (z_1, z_2) , \mathcal{C} の向きは M^4, B^2 の向きに合う。
- ★ (z_1, z_2) , \mathcal{C} の足の向きが M^4, B^2 の向きと合致しないともよいし、特異点付近の子のようすが $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$ ではなく一般の正則関数 $(z_1, z_2) \mapsto f(z_1, z_2)$ でよいとすると、"locally analytic fibration" の定義となる。