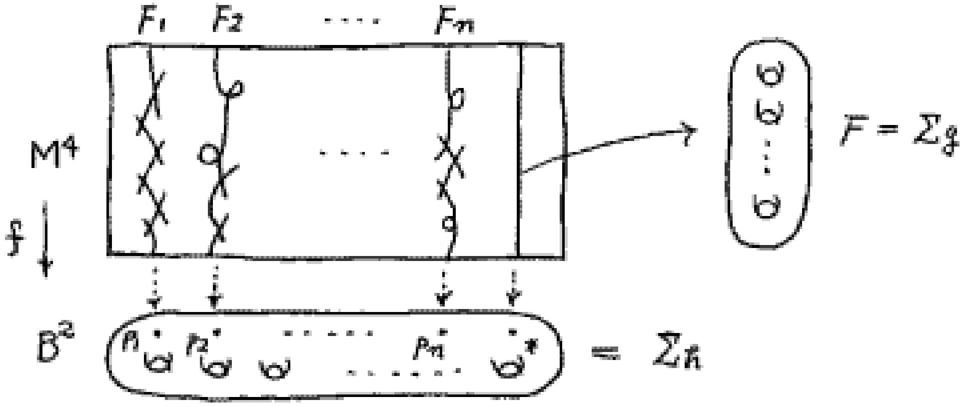
「曲面束の幾何と符号数」（第2日）

東工大理工　遠藤久顕

§4　局所符号数

・Local signature (in the sense of Y. Matsumoto)

きのうの復習 …… locally analytic fibration (loc AF)



$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \in \mathcal{M}_g$: モノドロミー

$\rho : \pi_1(B - \{p_1, \cdots, p_n\}, *) \longrightarrow \mathcal{M}_g$: 大域モノドロミー

☆ Lefschetz fibration の同型類は ρ の共役類できまる。

ι : hyperelliptic involution

$\mathcal{H}_g := \{\varphi \in \mathcal{M}_g \mid \varphi \circ \iota = \iota \circ \varphi\}$

: hyperelliptic mapping class group

（超楕円的写像類群）

Thm (Y. Matsumoto, E.)

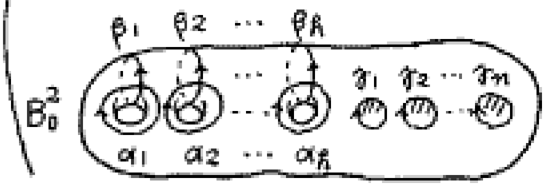
$$\mathrm{Im}\,\rho \subset \mathcal{H}_g \Rightarrow {}^{\exists 1}\,\sigma_g(F_i) \in \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z}$$

$$\text{s.t.}\quad \mathrm{Sign}(M^4) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_g(F_i)$$

☆ $\sigma_g(F_i)$ の値は F_i の近傍の位相型によらない。

（σ_g と σ_g^{top} ともかく。）

• Meyer の公式



$$\mathrm{Sign}\left(\begin{array}{c} M_0^4 \\ \downarrow f \\ B_0^2 \end{array}\right) = -\sum_{i=1}^{4h+n} \tau_g(\tilde{\omega}_{i-1}, \omega_i) \qquad (*)$$

↑ 符号数コサイクル

B_0^2 : $B - \{p_i$ の開近傍$\}$, $M_0^4 := f^{-1}(B_0^2)$

$\tilde{\omega}_h$: $\prod_{i=1}^{h} [\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^{n} \gamma_j$ の h 番目までの積 ($\in \mathcal{M}_g$)

ω_h : 〃 の h 番目 ($\in \mathcal{M}_g$)

（但し、$\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ は上の曲線のまわりのモノドロミー）

• 符号数コサイクルの類の位数

$\tau_g \in Z^2(Sp(2g, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$: 符号数コサイクル（昨日定義）

$\tau_g^H : \mathcal{H}_g \times \mathcal{H}_g \hookrightarrow \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \xrightarrow{\sigma \times \sigma} Sp(2g, \mathbb{Z}) \times Sp(2g, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau_g} \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow \quad \tau_g^H \in Z^2(\mathcal{H}_g, \mathbb{Z})$

Prop

$$\mathrm{ord}([\tau_g^H]) = 2g+1 \quad \text{in} \quad H^2(\mathcal{H}_g, \mathbb{Z})$$

この命題は τ_g の具体的計算と Meyer の位数判定法から従う。

直接の帰結として

$$\tau_g^H(x, y) = \phi_g(x) + \phi_g(y) - \phi_g(xy) \quad (x, y \in \mathcal{H}_g) \quad (**)$$

をみたす関数

$$\phi_g : \mathcal{H}_g \longrightarrow \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z}$$

が一意的に存在することがわかる。

• 局所集中のしかた（Thm の証明）

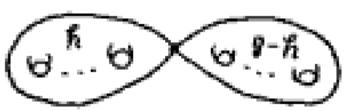
$\mathrm{Im}\,\rho \subset \mathcal{H}_g$ から、(*) と (**) より

$$\mathrm{Sign}(M_0) = -\sum_{i=1}^{n} \phi_g(\gamma_i)$$

よって、 $\sigma_g(F_i) := -\phi_g(\gamma_i) + \mathrm{Sign}(F_i$ の近傍$)$ とすればよい。

・ Lefschetz 型特異ファイバーの局所符号数

$\sigma_g\Bigg($  $\Bigg) = -\dfrac{g+1}{2g+1}$

$\sigma_g\Bigg($ 

$\Bigg) = \dfrac{4h(g-h)}{2g+1} - 1$

計算法 ： ϕ_g の計算 $\xleftarrow[(**)]{}$ τ_g の計算

$\longleftarrow$ モノドロミーを Lickorish 生成元に分解

式の形は low genus ($g=2,3,4,5$) での手計算から予想。

応用 ：
- 特異ファイバーの個数についての束縛公式
- Nöther 条件 ： $\chi(M) + \mathrm{Sign}(M) \equiv 0 \pmod 4$
- 正の符号数をもつ LF の具体構成
- 同相だが同型でない LF の構成
- 弱い形の Miyaoka-Yau 不等式のトポロジカルな導出

・ 解析的局所符号数 （代数曲面における対応物）

荒川達也・足利正 両氏による局所符号数 ：

$$\sigma_g^{hol}(F_i) := \frac{g\,\mathrm{Ind}(F_i) - (g+1)\,\varepsilon(F_i)}{2g+1} \in \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z}$$

$\mathrm{Ind}(F_i)$ ： F_i の Horikawa index $\in \frac{1}{g}\mathbb{Z}$

$\varepsilon(F_i) := \chi(F_i) - \chi(\Sigma_g)$

Thm (T. Terasoma)

$$\sigma_g^{top} = \sigma_g^{hol}$$

☆ 森田茂之、今野一宏、古田幹雄、吉川謙一、Siebert-Tian 各氏による様々な局所符号数が存在

§5 写像類群の非一様完全性

・森田予想

写像類群 $\mathcal{M}_g$ ($g \geq 3$) は完全 (i.e. $\mathcal{M}_g = [\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g]$) である (Powell)。

Thm (森田予想・Kotschick－E.)

$\mathcal{M}_g$ ($g \geq 3$) は一様完全ではない。

群 G が一様完全 $\Longleftrightarrow$ ある N があって、任意の $x \in G$ は高々 N コの交換子の積としてかける

Prop

$M^4 \xrightarrow{f} B^2 = \Sigma_h$: LF of genus g (≥ 2)

n, s : 非分離型、分離型ファイバーの数

$\Rightarrow \quad s \leq 6(3g-1)(h-1) + 5n$

・Prop $\Rightarrow$ Thm の証明

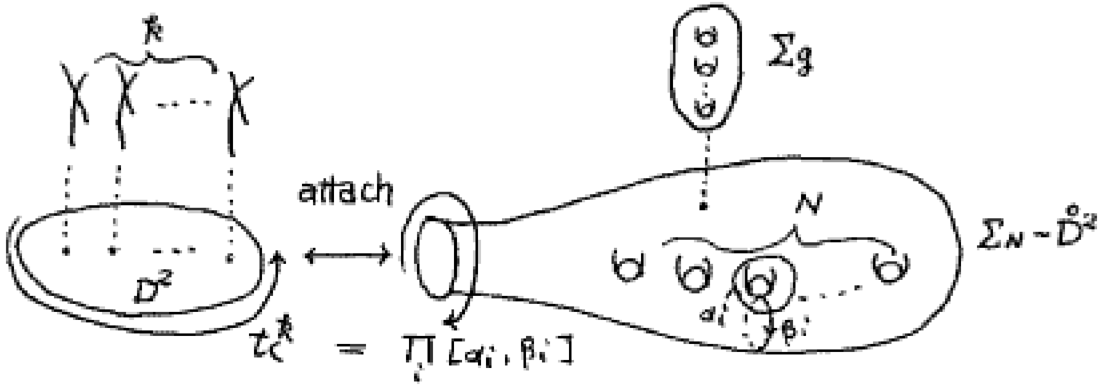
C : Σ_g 上の分離単純閉曲線

t_C : C に沿う Dehn twist

$k > 0$ に対し、t_C^k が N コの交換子の積にかけたとする：

$$t_C^k = [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_N, \beta_N] \quad (\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{M}_g)$$

→ Σ_N 上の genus g の LF で k コの分離型ファイバーをもつものが存在！



Prop で $n=0$, $s=k$, $h=N$ $\Rightarrow$ $N \geq \dfrac{k}{6(3g+1)} + 1$

よって、$N \to +\infty$ ($k \to +\infty$)

- 主結果（Prop.）の証明

① Gompf ⇨ M : symplectic 4-mfd ,
every fiber F : symplectic submfd

② rel. min. , Taubes + Liu ⇨ $b_2^+ > 1$ if $s > 0$

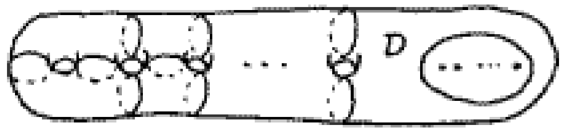
③ $b_2^+ > 1$, Taubes（SW ⇨ Gr）⇨ $\exists$ symp. emb. surface Σ (conn.)
s.t. $K = [\Sigma]$

④ adjunction formula for Σ : $2 - 2g(\Sigma) + K^2 = -K \cdot K$

$$\therefore \; g(\Sigma) = 1 + K^2 = 1 + 2\chi(M) + 3\sigma(M)$$

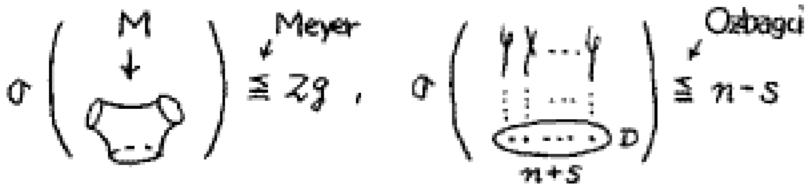
⑤ Euler char. : $\chi(M) = 4(g-1)(h-1) + s + n$

signature :



$B = \Sigma_h$

パンツと円板に分解



$$\therefore \; \sigma(M) \leqq 2g(2h-2) + n - s$$

⑥ ④ + ⑤ ⇨

$$g(\Sigma) - 1 \leqq 2(10g-4)(h-1) + 5n - s$$

⑦ adjunction formula for F : $2 - 2g + F^2 = -K \cdot F$

$\rightarrow d = \deg [f|_\Sigma : \Sigma \rightarrow B] = \Sigma \cdot F = K \cdot F = 2g - 2$

⑧ Kneser ⇨ $g(\Sigma) - 1 \geqq \underset{\substack{\parallel \\ ⑦ \Rightarrow \, 2g-2}}{d} \, (\underset{\substack{\parallel \\ h}}{g(B)} - 1)$

⑨ ⑥ + ⑧ ⇨

$$s \leqq 6(3g-1)(h-1) + 5n \qquad //$$

- Gromov の有界コホモロジー

一般に、群 G に対して 群のコホモロジー $H^*(G, \mathbb{R})$ が定義されるが、“有界な” コチェインのみを考えることによって、Gromov は G の有界コホモロジー $H_b^*(G, \mathbb{R})$ を定義した。

実は先程の「森田予想」よりも強い次の予想も "stable commutator length" を用いて Prop. から導ける。

Thm（森田予想 II・D. Kotschick − E.）

自然な準同型 $H^2_b(\mathcal{M}_g) \to H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{R})$ $(g \geqq 2)$ は単射でない

最近、さらに強く次のことが示された。

Thm（森田予想 III・Bestvina − Fujiwara）

$$\dim H^2_b(\mathcal{M}_g) = \infty \quad (g \geqq 2)$$

− 第2日おわり −