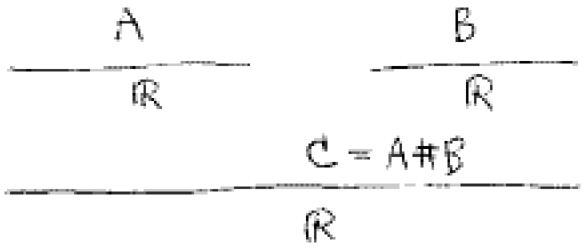
2001.02.22

M. Furuta III

補足



仮定　$B(x)$ が $\forall x$ に対して 0 固有値をもたない.

$\Longrightarrow \quad \mathrm{ind}\, D_A = \mathrm{ind}\, D_{A\#B}$　　切除定理

$\because$) $\mathrm{ind}\, D_B = 0$

$X \ (= \mathbb{C}P^2)$

4 dim ori. cl.

$w_2(TX) \in H^2(X, \mathbb{Z}/2)$　　(open $U \subset X$, $w_2(TX)|U = 0$ なら U は spin str をもつ)

Fact $\uparrow$ $\qquad \uparrow$

$\exists\, c \in H^2(X, \mathbb{Z})$

この c を使って X に spin^c str が入る.

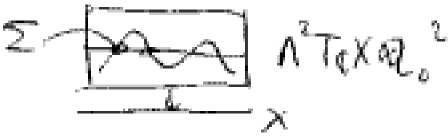
以下, 簡単のため TX が cpx vect b の構造をもつときに説明.

$$\begin{array}{ccc} w_2(TX) & \in & H^2(X, \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{c_1(\Lambda^2 T_{\mathbb{C}} X) + 2\alpha} & \in & H^2(X, \mathbb{Z}) \\ \| & & \\ c_1(L_0) & & \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2 T_{\mathbb{C}} X \otimes L_0^2 \arrow[d] \\ X \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

0-section と横断的.

$s^{-1}(0)=\Sigma$



$$\boxed{\begin{array}{c} PD[\Sigma] \bmod 2 \\ \| \\ w_2(TX) \end{array}}$$

$T\Sigma\oplus\nu \cong TX$

$\nu=\Lambda^2 T_{\mathbb{C}}X\otimes L_0^{2}\big|_\Sigma$

Λ^2

$T_{\mathbb{C}}\Sigma\otimes(\Lambda^2 T_{\mathbb{C}}X\otimes L_0^{2})\big|_\Sigma=\Lambda^2 T_{\mathbb{C}}X\big|_\Sigma$

簡単のため
cpx str と両立
と仮定（不用）
（実は）

$T_{\mathbb{C}}\Sigma=(L_0^{-1}|\Sigma)^{\otimes 2}$

$T^*_{\mathbb{C}}\Sigma=(L_0|\Sigma)^{\otimes 2} \Longrightarrow \Sigma$ に spin str が入る.

一方,

$X\setminus\Sigma$ の上で s によって $\Lambda^2 T_{\mathbb{C}}X\otimes L_0^{\otimes 2}\cong\mathbb{C}$

$X\setminus\Sigma$ 上 $c_1(\Lambda^2 T_{\mathbb{C}}X\otimes L_0^{\otimes 2})=0$

$\Downarrow$

$w_2(\quad TX \quad)=0$

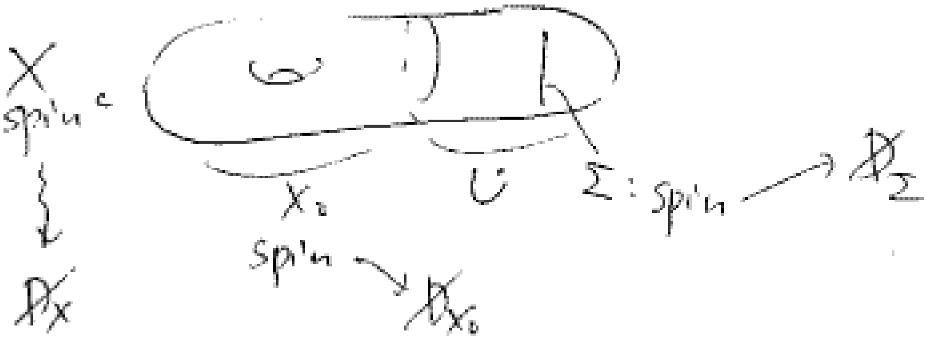
spin str が入る.

<u>まとめ</u>　X ori. cl. 4-mfd

$\Sigma\subset X$

$PD[\Sigma] \bmod 2=w_2(TX)$　—— X 上に spin^c str を定める.

$\Longrightarrow$ $X\setminus\Sigma$, Σ 上の spin str が入る.



$$\operatorname{ind} \not{D}_X \underset{\bmod 2}{=} \underset{\substack{\text{spin}\\ \text{偶}}}{\operatorname{ind} \not{D}_{X_0}} + \underset{\substack{\text{spin}\\ \text{偶}}}{\operatorname{ind} A_{+\infty}} + \operatorname{ind} \not{D}_U$$

$\|$ 積公式の変種

$-\dim \operatorname{Ker} \partial_{L_0}$

$$\text{左辺} = e^{-\frac{c}{2}}\hat{A}(TX) = \frac{c^2 - \operatorname{sign}(X)}{8}$$

指数定理

右辺 $=$ Arf (L_0で決まる Σ上の spin str.)

<u>Thm</u> (Kervaire-Milnor)

$c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ $c \bmod 2 = w_2(TX)$

$$\Longrightarrow \frac{c^2 - \operatorname{sign}(X)}{8} = \operatorname{Arf}(\Sigma, L_0) \mod 2$$

X closed manifold

D_X Dirac op の変種

Step 1

$$X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

Step 2

$$D_X \rightsquigarrow D_U \sim D_{\mathbb{R}^N}$$

normal 方向に de Rham op の変形を図

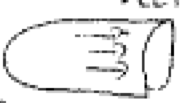
自明に拡張

$$\operatorname{ind} D_{\mathbb{R}^N} \underset{和}{=} \underbrace{\operatorname{ind} D_{\mathbb{R}^N \setminus U}}_{= 0} + \text{``}\underbrace{\operatorname{ind} A_{+\infty}}_{= 0}\text{''} + \underbrace{\operatorname{ind} D_U}_{\underset{積}{\parallel}}$$

$\operatorname{ind} D_X \cdot \operatorname{ind}$(de Rham on fiber)

$D_X \sim D_U$ のせつめい

vect field



fiber $\mathbb{R}^{N-\dim X}$ の上の

$SO(N-\dim X)$ 不変な metric をいれ

de Rham の変形

$$\boxed{d + d^* + \varepsilon(V) + \iota(V)} \longrightarrow$$

$\boxed{\mathrm{Ker}\text{“}A_{+\infty}\text{”} = 0}$

$\longrightarrow$ $\mathrm{ind} = \chi(\mathbb{R}^{N-\dim X}) = 1$

$\mathrm{Ker} \cong \mathbb{R}$ 定数関数
SO(N-dim X) 不変

$D_U \rightsquigarrow D_{\mathbb{R}^N}$ のせつめい

アナロジー

ω_U : U上の cpt supp. closed form
ω_X : 0で拡張してX上の cpt supp.

切除定理がつかえる。(拡張の仕方から) $\longrightarrow$ $\mathrm{ind}\, D_{\mathbb{R}^N \setminus U} = 0$

拡張

$\forall X$ $\forall$(Dirac typeの) D_X
$\exists N \in \mathbb{N}$ $\exists D_{\mathbb{R}^N} \Leftarrow$ D_X とうめこみ $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ をつかって具体的につくれる

$\rightsquigarrow$ Euclid空間上の話に帰着。

$\mathbb{R}^N$ 上の op を (ゆるく) 分類

$K(T^*\mathbb{R}^N) \underset{\substack{\text{Bott}\\ \text{周期性}}}{=} \mathbb{Z}$

//