数の幾何と Riemann-Roch の定理*

森下 昌紀 （金沢大 理)

このノートでは、指数定理の基本的な例である compact Riemann 面上の Riemann-Roch の定理と代数体の数論における Minkowski の数の幾何との類似について解説する。この類似は、E.Artin, A.Weil の時代から実質的には知られていたことである ([W])。この関数体と代数体の類似という方向では、高次元化が発展の方向である。数の幾何も Arakelov 幾何として高次元化されている。城崎では解説できなかったが、数論的曲面の場合を最後に解説した。

1. Compact Riemann 面の場合
2. 有限体上の代数曲線の場合
3. 代数体の場合
4. 数論的曲面の場合

1. Compact Riemann 面の場合.

Xを compact Riemann 面とし、$\mathbf{C}(X)$ をその上の有理型関数全体のなす体とする。

(1) 因子、直線束. X上の点全体を底とする自由 abel 群 $\mathrm{Div}(X) := \bigoplus_{P \in X} \mathbf{Z}[P]$ を Xの因子群と呼び、その元である形式和 $\sum_{P\in X} n_P[P]$ $(n_P \in \mathbf{Z})$ を X上の因子と言う。因子 $D = \sum_{P\in X} n_P[P]$ に対し、その次数を $\deg(D) := \sum_P n_P$ により定義する。関数 $f \in \mathbf{C}(X)^\times$に対し、その主因子 $(f) \in \mathrm{Div}(X)$ を $(f) := \sum_P \mathrm{ord}_P(f)[P]$ により定義する。ここで、$\mathrm{ord}_P(f)$ は fの点 Pにおける位数である。準同型 $f \in \mathbf{C}(X)^\times \mapsto (f) \in \mathrm{Div}(X)$ の余核を Xの因子類群と言い、$\mathrm{Cl}(X)$ と書き、主因子の差を法として等しい因子 D_1, D_2を線形同値 $(D_1 \sim D_2)$ と言う：

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathbf{C}(X)^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow 0 \ \text{(exact)}.$$

Cauchy の積分公式により、$\deg((f)) = 0$ なので、deg は因子類群を経由する：$\deg : \mathrm{Cl}(X) \to \mathbf{Z}$.
X上の直線束は、X上の階数１の局所自由層 (可逆層) というのと同じである。因子 Dに対し、Xの開被覆 $X = \bigcup_i U_i$がとれて $D|_{U_i} = (s_i)$ $(\exists s_i \in \mathbf{C}(U_i))$

---
* 「指数定理からゲージ理論へ II」城崎 2001 年 2 月

と書けるので、可逆層 $\mathcal{O}(D)$ が $\mathcal{O}(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_X s_i^{-1}$がにより定まる。ここで、$\mathcal{O}_X$は X上の正則関数のなす層である。$s_j/s_i \in H^0(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_X^\times)$ が直線束の張り合わせの関数である。逆に、可逆層 L から上の逆をたどり因子 Dが得られ、同型な直線束には線形同値な因子が対応することが見てとれ、因子類群 $\mathrm{Cl}(X)$ は、直線束の同型類のなす群 $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ と同一視される。$\deg(L)$ は Chern 類 $c_1(L) \in H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ に等しい。
$\mathrm{Cl}(X)$ の構造については、次の Abel-Jacobi の定理がある。$\mathrm{Div}(X)_0, \mathrm{Cl}(X)_0$ を次数 0 の因子、因子類のなす群とする：$\mathrm{Cl}(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathrm{Cl}(X)_0$. X上の点 Oをとり、$D = \sum n_P([P]-[O]) \in \mathrm{Div}(X)_0$と書き、$O$と Pを結ぶ道γを選ぶ。Ω_Xを余接束 (=標準層) とすると、$\mathrm{Div}(X)_0 \ni D \mapsto (\omega \mapsto \int_\gamma \omega) \in H^0(X, \Omega_X)^*$ は全射で、Oとγの取り方によらない同型写像 $\mathrm{Cl}(X)_0 \xrightarrow{\sim} H^0(X, \Omega_X)^*/H^1(X, \mathbf{Z})$ を導く。ここで、$H_1(X, \mathbf{Z})$ は、$H^1(X, \mathbf{Z}) \ni [l] \mapsto (\omega \mapsto \int_l \omega) \in H^0(X, \Omega_X)^*$により、$H^0(X, \Omega_X^1)^*$の格子とみなす。この同型は、因子 $D \in \mathrm{Div}(X)_0$がいつある有理型関数の主因子になるかを教えてくれる (Abel)。$g := \dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \Omega_X)$ とすると、Hodge 分解、de Rham の定理より、$g = \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{C}} H_1(X, \mathbf{C})$. 従って、abel 群としては、$\mathrm{Cl}(X)_0 \simeq (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{2g}$ である。

(2) Riemann-Roch の定理. X上の直線束 L に対し、Dolbeault 作用素 $\overline{\partial_L}$: $H^0(X, L) \to H^0(X, L^\vee \otimes \Omega^{0,1})$ ($\Omega^{0,1}$ = 反正則１形式の層) に対する指数定理より、次を得る ([古]4.1;[吉]8.4.4)。

定理 1.1. (Riemann-Roch の第１形)

$$\chi(L) := h^0(L) - h^1(L) = \deg(L) + 1 - g.$$

但し、$h^i(L) := \dim H^i(X, L)$.

積 $L \times L^\vee \otimes \Omega_X \to \Omega_X$ は、pairing

$$H^1(X, L) \times H^0(X, L^\vee \otimes \Omega_X) \to H^1(X, \Omega_X) \overset{\mathrm{Res}}{\to} \mathbf{C}$$

を導くが、Serre 双対性はこれが perfect であることを主張する。

定理 1.2. (Serre 双対性)

$$H^1(X, L)^* \ \simeq \ H^0(X, L^\vee \otimes \Omega_X).$$

特に、$h^1(L) = h^0(L^\vee \otimes \Omega_X)$.

定理 1.3. (Riemann-Roch の最後形)

$$h^0(L) - h^0(L^\vee \otimes \Omega_X) = \deg(L) + 1 - g.$$

これより直ちに、

系 1.4. (1) $\chi(L) = \deg(L) + \chi(\mathcal{O}_X)$.
(2) $\deg(L) < 0$ なら、$h^0(X, L) = 0$.
(3) $\deg(L) > \deg(\Omega_X) = 2g - 2$ なら、$h^0(L) = \deg(L) + 1 - g$.

2. 有限体上の代数曲線の場合.

代数体へ移る途中のよい類似として、有限体上の代数曲線の場合を述べよう (Riemann 面は複素数体上の代数曲線の場合である)。Xを q個の元からなる体 $\mathbf{F}_q$上の非特異、射影的代数曲線とし、X_0を Xの閉点全体、$K = \mathbf{F}_q(X)$を Xの関数体、$\mathcal{O}_X$を Xの構造層とする。$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{F}_q$と仮定する。

(1) 因子、直線束. X_0を底とする自由 abel 群 $\mathrm{Div}(X) := \bigoplus_{P \in X_0} \mathbf{Z}[P]$ の元 $D = \sum_P n_P[P]$, $n_P \in \mathbf{Z}$, を X上の因子と言う。$D \geq 0$ とは、$n_P \geq 0, \forall P$を意味する。その次数を $\deg(D) := \sum_P n_P[\kappa(P) : \mathbf{F}_q]$ により定義する。ここで、$\kappa(P) := \mathcal{O}_{X,P}/m_P$ (=Pにおける剰余体) と定義する。$f \in K^\times$に対する主因子は、$(f) := \sum \mathrm{ord}_P(f)[P]$ と定義され、$\deg((f)) = 0$がわかる (これをみるには、$X = \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$のとき直接確かめ、一般の Xについては有限次被覆 $X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$を用いてわかる)。 Xの因子類群 $\mathrm{Cl}(X)$ も $K^\times \ni f \mapsto (f) \in \mathrm{Div}(X)$ の余核として定義され、X上の可逆層との対応も Riemann 面の場合と全く同様である： $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$. 異なる点は $\mathrm{Cl}(X)_0 = \ker(\deg)$ が有限 abel 群となる所である。微分 K-加群$\Omega_{K/\mathbf{F}_q}$は1次元空間で、その底 ωに伴う因子 Wが標準層 Ω_Xに対応する。$g := \dim_{\mathbf{F}_q} H^0(X, \Omega_X)$ とおく。

(2) Riemann-Roch の定理. この場合は層の cohomology を用いて、Riemann-Roch の定理、Serre 双対性が得られる ([上]8 章参照)。

定理 2.1. (Serre 双対性、Riemann-Roch の定理)

$$H^1(X, L)^* \simeq H^0(X, L^\vee \otimes \Omega_X).$$

$$h^0(L) - h^0(L^\vee \otimes \Omega_X) = \deg(L) + 1 - g.$$

応用 (zeta 関数). 定理 2.1 は次のような母関数

$$Z_X(T) := \sum_{D\geq 0} T^{\deg(D)} = \prod_{P\in X_0}(1-T^{\deg(P)})^{-1}$$

の関数等式として表される。$\Theta(D) = \#H^0(X, \mathcal{O}(D)) = q^{h^0(\mathcal{O}(D))}$ とおく。これは D の類にしかよらないので $\mathrm{Cl}(X)$ 上の関数である: $\Theta(\alpha) = \Theta(D), \alpha = [D]$.
$\#\{D' \geq 0 \mid D' \sim D\} = \#\mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}(D))) = (\Theta([D]) - 1)/(q-1)$ なので、

$$Z_X(T) = \frac{1}{q-1} \sum_{\alpha\in \mathrm{Cl}(X), \deg(\alpha)\geq 0} (\Theta(\alpha)-1)T^{\deg(\alpha)}.$$

Riemann-Roch より、$\deg(\alpha) > 2g-2$ なら、$\Theta(\alpha) = q^{\deg(\alpha)+1-g}$. また、$\ker(\deg) = \mathrm{Cl}(X)_0$ は有限で、$\mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Cl}(X)_0 \simeq \mathbf{Z}$ なので、

$$Z_X(T) = \tfrac{1}{q-1}(A(T)+B(T)),$$

$$A(T) = \#\mathrm{Cl}(X)_0(\sum_{n>2g-2} q^{1-g+n}T^n - \sum_{n\geq 0} T^n) = \#\mathrm{Cl}(X)_0(q^{1-g}\frac{(qT)^{2g-1}}{1-qT} - \frac{1}{1-T}),$$

$$B(T) = \sum_{0\leq \deg(\alpha)\leq 2g-2} (\Theta(\alpha)-1)T^{\deg(\alpha)}.$$

これより、$A(T) = \frac{C(T)}{(1-qT)(1-T)}$ ($C(T) \in \mathbf{Z}[T]$, $\deg(C(T)) = 2g$) の形で、$A(\frac{1}{qT}) = (qT^2)^{1-g}A(T)$ がわかる。$B(T)$ も $\Theta(\alpha) = \Theta(w-\alpha)q^{\deg(\alpha)+1-g}$ を代入すると、$B(\frac{1}{qT}) = (qT^2)^{1-g}B(T)$ がみてとれる。従って、$Z_X(T)$ は、$\frac{F(T)}{(1-qT)(1-T)}$ ($F(T) \in \mathbf{Z}[T]$, $\deg(F(T)) = 2g$) の形で、等式

$$Z_X(\frac{1}{qT}) = (qT^2)^{1-g} Z_X(T)$$

を満たす。
$X(\mathbf{F}_{q^n}) = \coprod_{P\in X_0} \mathrm{Hom}(\kappa(P), \mathbf{F}_{q^n})$ に注意すれば、$\log \prod_{P\in X_0}(1-T^{\deg(P)})^{-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{\#X(\mathbf{F}_{q^n})}{n} T^n$ がわかるので、$Z_X(q^{-s})$ は X の合同 zeta 関数と等しい：

$$Z_X(q^{-s}) = \exp(\sum_{n\geq 1} \frac{\#X(\mathbf{F}_{q^n})}{n} q^{-sn})$$

3. 代数体の場合.

Kを有限次代数体 ($\mathbf{Q}$ の有限次拡大、$N=[K:\mathbf{Q}]$ とする)、$\mathcal{O}_K$を K内の代数的整数のなす環、μ_Kを K内の 1 のべき根のなす群, $w_K := \#\mu_K$, とする。$X := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$、 X_0 を Xの閉点 (= 極大 ideal) 全体、$X_\infty := \{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}\}/$(複素共役) とする。$\sigma \in X_\infty$ は、$\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{R}$ のとき実、$\sigma : K \not\hookrightarrow \mathbf{R}$ のとき複素、と呼ばれ、各々の場合に従って、$K_\sigma := \mathbf{R}$ ないし $\mathbf{C}$, $\epsilon_\sigma = 1$ ないし 2 とおく。実なる σが r_1個、複素なる σ (mod 複素共役) が r_2個あるとする: $N = r_1 + 2r_2$. $\overline{X} := X \cup X_\infty$を "compact 化された数論的曲線"とみる。

(1) Arakelov 因子、metrized 直線束. $\overline{X}$上の Arakelov 因子群とは、位相 abel 群 $\mathrm{Div}(\overline{X}) := \bigoplus_{P\in X_0} \mathbf{Z}[P] \oplus \bigoplus_{\sigma\in X_\infty} \mathbf{R}[\sigma]$ のことであり、その元 $D = \sum_{P\in X_0} n_P[P] + \sum_{\sigma\in X_\infty} r_\sigma[\sigma]$ ($n_P \in \mathbf{Z}, r_\sigma \in \mathbf{R}$) を$\overline{X}$上の Arakelov 因子という。ここで、$\mathrm{Div}(\overline{X})$ の位相は、$\mathbf{Z}$ は離散、$\mathbf{R}$ は Euclid 空間とみなし、直積位相から誘導されるものとする。次数は、$\deg(D) := \sum_P n_P \log N(P) + \sum_\sigma r_\sigma$ と定義する。ここで、$N(P) = \#(\mathcal{O}_K/P)$. また、$N(D) = \exp(\deg(D))$ とおく。"関数" $f \in K^\times$に対し、その主因子を、$(f) := \sum_P \mathrm{ord}_P(f)[P] - \sum_\sigma \epsilon_\sigma \log|\sigma(f)|[\sigma]$ と定義する。但し、$f\mathcal{O}_K = \prod_P P^{\mathrm{ord}_P(f)}$ (極大 ideal 分解) とする。準同型 $K^\times \ni f \mapsto (f) \in \mathrm{Div}(\overline{X})$ の余核を $\overline{X}$の Arakelov 因子類群と言い、$\mathrm{Cl}(\overline{X})$ と書くことにする。これは、局所 compact abel 群である:

$$0 \longrightarrow \mu_K \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(\overline{X}) \longrightarrow \mathrm{Cl}(\overline{X}) \longrightarrow 0 \ \ (\mathrm{exact}).$$

積公式により $\deg((f)) = 0$ なので、連続準同型 $\deg : \mathrm{Cl}(\overline{X}) \to \mathbf{R}$ を定める。次に、$\overline{X}$上の metrized 直線束とは、X上の可逆層、すなわち、射影的 $\mathcal{O}_K$-加群 (= Kの分数 ideal) L と各 $\sigma \in X_\infty$に対する $L_\sigma := L \otimes_k k_\sigma$上の Hermite 計量 $||\cdot||_\sigma$の pair $\overline{L} = (L, (||\cdot||_\sigma)_{\sigma\in X_\infty})$ のことと定義する。$\overline{L}$と$\overline{L}' = (L', (||\cdot||'_\sigma))$ が同型とは、$\mathcal{O}_K$-同型 $\psi : L \xrightarrow{\sim} L'$ が存在し、各 $\sigma \in X_\infty$に対し、isometry $\psi_\sigma : L_\sigma \xrightarrow{\sim} L'_\sigma$ を導くことと定める。その同型類の集合 $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ は、$[L]\cdot[L'] := [(L \otimes_{\mathcal{O}_K} L', (||\cdot||_\sigma \cdot ||\cdot||'_\sigma))]$ により abel 群をなす。
Arakelov 因子 $D = \sum_P n_P[P] + \sum_\sigma r_\sigma[\sigma]$ に対し、metrized 直線束 $\mathcal{O}_{\overline{X}}(D) := (\mathcal{O}_X(D_f), (||\cdot||_\sigma)_{\sigma\in X_\infty})$ が、$\mathcal{O}_X(D_f) := \prod_P P^{-n_P}$, $||1||_\sigma := \exp(-r_\sigma/\epsilon_\sigma)$ により定まり、 逆に、metrized 直線束に対し、Arakelov 因子がこの逆をたどって定まり、$\mathrm{Cl}(\overline{X})$ と $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ との同型を与える。また、Dと$\overline{L}$の類が対応する時、$\deg(D) = \deg(\overline{L}) := \log\#(L/s\mathcal{O}_K) - \sum \epsilon_\sigma \log ||s||_\sigma$ ($s \in L$: section) が成り立つことが分かる (従って、s のとり方によらない)。

(2) Riemann-Roch の定理. Metrized 直線束 $\overline{L} = (L, (||\cdot||_\sigma))$ に対する global section の類似は、

$$H^0(\overline{X}, \overline{L}) := \{s \in L \,|\, ||s||_\sigma \leq 1,\ \forall \sigma \in X_\infty\}$$

で与えられる。L は Kの分数 ideal なので、

$$L \stackrel{\subsetneq}{\to} \bigoplus_{\sigma \in X_\infty} L_\sigma \simeq \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2} = \mathbf{R}^N$$

により、L は $\mathbf{R}^N$ の格子をなす。各 L_σ 上に計量 $||\cdot||_\sigma^{\epsilon_\sigma}$から導かれる測度を入れ、$\mathbf{R}^N$上にその積測度 μ_L を入れる。このとき、$\overline{L}$の Euler 標数を

$$\chi(\overline{L}) := -\log_{\mu_L}(\mathbf{R}^N/L)$$

により定義する。

例. $\overline{\mathcal{O}_X} = \mathcal{O}_{\overline{X}} = (\mathcal{O}_K, (||\cdot||_\sigma)), ||1||_\sigma = 1,$ に対し、$\deg(\mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$, $H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = \mu_K \cup \{0\}$, $\chi(\mathcal{O}_{\overline{X}}) = \log(2^{r_2}|\Delta_K|^{-1/2})$ ($\Delta_K = K$の判別式). 一般の $\overline{L} = (L, (||\cdot||_\sigma))$ に対しては、$\chi(\overline{L}) = -\log(2^{-r_2}|\Delta_K|^{1/2}N(L)\prod_{\sigma \in X_\infty}||1||_\sigma^{\epsilon_\sigma})$.

これより直ちに、系 1.4 の類似である次が成り立つ。

定理 3.1. (1) $\chi(\overline{L}) = \deg(L) + \chi(\mathcal{O}_{\overline{X}})$.
(2) $\deg(\overline{L}) < 0$ なら、$H^0(\overline{X}, \overline{L}) = \{0\}$.
(3) $\deg(\overline{L}) > \chi(\overline{L}) + \log(\pi/2)^{r_2}$ なら、$H^0(\overline{X}, \overline{L}) \neq \{0\}$.

ここで (3) は、「$\mathbf{R}^N$の中心対称かつ凸な有界集合 Bと $\mathbf{R}^N$の格子 Γ に対し、$\mathrm{vol}(B) > 2^N\mathrm{vol}(\mathbf{R}^N/\Gamma)$ ならば、$B \cap \Gamma \neq \{0\}$」という Minkowski の数の幾何の第１凸体定理を $B = \{(x_\sigma) \in \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2} = \mathbf{R}^N \,|\, ||x_\sigma||_\sigma \leq 1,\ \forall \sigma \in X_\infty\}$, $\Gamma = L$ に適用して得られるものである。

微分 $\mathcal{O}_K$-加群 $\Omega_{\mathcal{O}_K/\mathbf{Z}}$は、$\mathcal{O}_K$上１元$\omega$で生成され、その annihilator は $K/\mathbf{Q}$ の共役差積 $\mathcal{D} = \prod_P P^{d_P}$である：$\Omega_{\mathcal{O}_K/\mathbf{Z}} = \mathcal{O}_K\omega \simeq \mathcal{O}_K/\mathcal{D}$. (ω) に付随する自明な計量をもった metrized 直線束を$\overline{X}$上の余接束 $\Omega_{\overline{X}}$とし、対応する Arakelov 因子 $W = \sum_P d_P[P] + \sum_\sigma 0[\sigma]$ を微分因子と定める。
定理 1.3 の類似を得るために、$h^0(L) = \dim H^0(X, L)$ に対応する量として、次を導入する。metrized 直線 $\overline{L} = (L, (||\cdot||_\sigma))$ と $s \in L$ に対し、

$$||s||_{\overline{L}}^2 := \sum_\sigma \epsilon_\sigma ||s||_\sigma^2 = \sum_\sigma \epsilon_\sigma e^{-2r_\sigma/\epsilon_\sigma}|\sigma(s)|^2,\quad \Theta(\overline{L}) := \sum_{s \in L}\exp(-\pi||s||_{\overline{L}}^2)$$

とおき、

$$h^0(\overline{L}) \ := \ \log(\Theta(\overline{L}))$$

と定義する。ここで、$\Theta(\overline{L})$ は $\mathrm{Cl}(\overline{X})$ 上の関数であることに注意する。対応する Arakelov 因子 Dに対しても、$||s||_D, \Theta(D), h^0(D)$ などの記号を用いる。

定理 3.2. (Riemann-Roch の最終形)

$$h^0(\overline{L}) - h^0(\overline{L}^\vee \otimes \Omega_{\overline{X}}) = \deg(\overline{L}) - \frac{1}{2}\deg(W).$$

(証明) $\overline{L} = (L, (|| \cdot ||_\sigma))$ とする。d_Lを L の整数底から決まる判別式の絶対値とする：$d_L = N(L)^2|\Delta_K|$. $d_{(\mathcal{D}L)^{-1}} = d_L^{-1}$, $\overline{L}^\vee \otimes \Omega_{\overline{X}} = ((\mathcal{D}L)^{-1}, (|| \cdot ||_{\sigma^\vee}))$, $||1||_{\sigma^\vee} = ||1||_\sigma^{-1}$ に注意して、Hecke の theta 変換公式 (Poisson の和公式)([L], p252) を適用することにより、

$$\begin{aligned}
\Theta(\overline{L}) &= \sum_{s\in L} \exp(-\pi||s||^2_{\overline{L}}) \\
&= \sum_{s\in L} \exp(-\pi \sum_\sigma \epsilon_\sigma ||1||^2_\sigma |\sigma(s)|^2) \\
&= (d_L \prod_\sigma ||1||_\sigma^{2\epsilon_\sigma})^{-1/2} \sum_{s\in(\mathcal{D}L)^{-1}} \exp(-\pi d_{(\mathcal{D}L)^{-1}}^{-1/N} \sum_\sigma ||1||_\sigma^{-2}|\sigma(s)|^2) \, (\text{Poisson 和公式}) \\
&= (N(L) \prod_\sigma ||1||_\sigma^{\epsilon_\sigma})^{-1} |\Delta_K|^{-1/2} \sum_{s\in(\mathcal{D}L)^{-1}} \exp(-\pi ||s||^2_{\overline{L}^\vee \otimes \Omega_{\overline{X}}}) \\
&= \exp(\deg(D))|\Delta_K|^{-1/2}\Theta(\overline{L}^\vee \otimes \Omega_{\overline{X}}). \quad \square
\end{aligned}$$

注. 上の議論では、Poisson の和公式から直ちに Riemann-Roch の最終形が得られ、Serre の双対性を欠いている (つまり H^1が登場していない)。Borisov[B] は、局所 compact abel 群とその上の測度の convolution structure を pair にした空間概念 (gohst space) を導入し、その枠組みで、通常の Ceck cohomology を用いた議論と類似した手続きで、Serre 双対性の定式化を与えている。これは、関数体の場合、岩澤や Tate が H^1の代用として導入した $\mathbf{A}_K/(K + H^0(D))$($\mathbf{A}_K$は adele 環) に対応するものに見える。

応用 (zeta 関数). 有限体上の代数曲線の場合と同様、Riemann-Roch の定理 4.2 は、代数体 Kの完備 (i.e, Gamma 因子付)zeta 関数の関数等式を導く。Arakelov 因子 $D = \sum n_P[P] + \sum r_\sigma[\sigma]$ に対し、$D \geq 0$ は $n_P \geq 0, \forall P$ を意味する。Tを不定元として、母関数

$$Z_{\overline{X}}(T) := \int_{D\in \mathrm{Div}(\overline{X}), D\geq 0} T^{\deg(D)} \exp(-\pi||1||_D^2) d\mu$$

を考える。ここで $d\mu$は、$\mathbf{Z}[P]$ 上には counting 測度 $d\mu_P$、$\mathbf{R}[\sigma]$ 上には Lebesgue 測度 $d\mu_\sigma$を入れ、$d\mu := \prod_P d\mu_P \times \prod_\sigma d\mu_\sigma$ と定める。$t_\sigma = e^{-r_\sigma}$ おくと、

$$\begin{aligned} Z_{\overline{X}}(e^{-s}) &= \sum_{0\neq I\subset \mathcal{O}_K} N(I)^{-s} \int_0^\infty (\prod_\sigma t_\sigma^s) \exp(-\pi \sum_{\sigma:\text{実}} t_\sigma^2 - 2\pi \sum_{\sigma:\text{複素}} t_\sigma) \prod_\sigma \frac{dt_\sigma}{t_\sigma} \\ &= (2\pi^{-s/2}\Gamma(s/2))^{r_1}((2\pi)^{-s}\Gamma(s))^{r_2} \sum_{0\neq I\subset \mathcal{O}_K} N(I)^{-s} \\ &=: \zeta_{\overline{X}}(s) \end{aligned}$$

を得る (この$\zeta_{\overline{X}}$は通常の完備 zeta と Gamma 因子が少し違うことに注意)。$\zeta_{\overline{X}}(s)$ は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し、代数曲線の時と同様に、

$$\zeta_{\overline{X}}(s) = w_K^{-1} \int_{\alpha\in \mathrm{Cl}(\overline{X}),\, \alpha\geq 0} (\Theta(\alpha)-1) N(\alpha)^{-s} d\alpha.$$

と変形される ($d\alpha$は商測度)。定理 3.2 により、

$$\begin{aligned} &\zeta_{\overline{X}}(s) = w_K^{-1}(A(s)+B(s)), \\ A(s) &= \int_{N(\alpha)>|\Delta_K|^{1/2}} (\Theta(\alpha)-1)\frac{N(\alpha)^{s-1}}{|\Delta_K|^{(s-1)/2}} d\alpha + \frac{\mathrm{vol}(\mathrm{Cl}(\overline{X})_0)}{s(s-1)|\Delta_K|^{s/2}}, \\ B(s) &= \int_{N(\alpha)\leq|\Delta_K|^{1/2}} (\Theta(\alpha)-1) N(\alpha)^{-s} d\alpha. \end{aligned}$$

これより、関数等式

$$\zeta_{\overline{X}}(s-1) = |\Delta_K|^{\frac{1}{2}-s}\zeta_{\overline{X}}(s)$$

が従う。また、$\zeta_{\overline{X}}(s)$ が $s>1$ で収束することから、$\mathrm{vol}(\mathrm{Cl}(\overline{X})_0) < \infty$, i.e, $\mathrm{Cl}(\overline{X})_0$の compact 性もわかる。さらに、$H := \ker(\deg|_{\oplus_\sigma \mathbf{R}[\sigma]}) \simeq \mathbf{R}^{r_1+r_2-1}$, $\mathrm{reg} : \mathcal{O}_K^\times \to H$, $\mathrm{reg}(\varepsilon) := (\epsilon_\sigma \log|\sigma(\varepsilon)|)$ (regulator 写像) とすると、完全列

$$0 \longrightarrow H/\mathrm{reg}(\mathcal{O}_K^\times) \longrightarrow \mathrm{Cl}(\overline{X})_0 \longrightarrow \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow 0$$

より、$h_K := \#\mathrm{Cl}(X)$(Kの類数) の有限性及び $\mathcal{O}_K^\times \simeq \mu_K \times \mathbf{Z}^{r_1+r_2-1}$(Dirichlet の単数定理) が従う。$\mathrm{vol}(H/\mathrm{reg}(\mathcal{O}_K^\times))$ はKの regulator R_Kと呼ばれ、$\mathrm{vol}(\mathrm{Cl}(\overline{X})_0) = h_K R_K$. 関数等式から、$X$の zeta 関数 $\zeta_X(s) = \sum_{0\neq I\subset\mathcal{O}_K} N(I)^{-s}$は複素平面全体に解析接続され、$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=1$ に注意すると、$\zeta_X(s)$ は $s=0$ で r_1+r_2-1 位の極をもち、その留数は $-\mathrm{vol}(\mathrm{Cl}(\overline{X})_0)/\#\ker(\mathrm{reg}) = -h_K R_K/w_K$ で与えられる (類数公式)。

以上、1 ~ 3 節の記述は加藤和也先生の講義ノートを参考にさせて頂いた。

4. 数論的曲面の場合.

Arakelov[A] は、1,2 節と 3 節の間の類似を 2 次元の場合へ拡張した。Compact 複素代数曲面 Xに対し、Riemann-Roch の定理は、

$$\chi(L) = \frac{1}{2}\langle L, L \otimes \omega_X^\vee \rangle + \chi(\mathcal{O}_X)$$

と書ける。ここで、$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}$ は X上の直線束 (=因子) の交点形式を表す。数論的曲面上でこの類似を行うには、交点理論を無限素点も考慮に入れて構成し、次に cohomology 上に適当な volume form を与えて Euler 標数をうまく定義しなければならない。前者は Arakelov([A]) により、後者は Faltings([F1]) によりなされた。

Kを代数体、$S := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とする。この Sについて、3 節の記号をそのまま用いる。Xは S上の 2 次元 regular scheme で、$f : X \to S$を projective, flat morphism とする。generic fibre X_Kは K上の projective, smooth, geometrically irreducible curve とする。$\sigma \in S_\infty$に対し、$X_\sigma := (X \otimes K_\sigma)(\mathbf{C})$ とおき、compact Riemann 面 X_σ上の C^∞ (1,1)-form(ないし 対応する hermit 計量) $d\mu_\sigma$を$\int_{X_\sigma} d\mu_\sigma = 1$ となるようにとっておく。この pair $\overline{X} := (X, (d\mu_\sigma)_{\sigma \in S_\infty})$ を "compact 化された数論的曲面" とみる。

(1) Arakelov 因子、metrized 直線束 (付記:Admissible Green metrics).

Scheme$X$上の codim.= 1 の点全体を X^1と表す。対応 $X \ni x \mapsto C := \overline{\{x\}}$ により、X^1は codim. = 1 の Xの閉既約部分 scheme の集合ともみれる。$\mathrm{Div}(X) := \bigoplus_{C \in X^1} \mathbf{Z}[C]$ が X上の Weil 因子群である。$\overline{X}$上の Arakelov 因子群とは、abel 群 $\bigoplus_{C \in X^1} \mathbf{Z}[C] \oplus \bigoplus_{\sigma \in S_\infty} \mathbf{R}[X_\sigma]$ のことであり、その元 $D = \sum_C n_C[C] + \sum_\sigma r_\sigma[X_\sigma] (n_C \in \mathbf{Z}, r_\sigma \in \mathbf{R})$ を$\overline{X}$上の Arakelov 因子という。$f \in K(X_K)^\times$に伴う主因子を、$(f) := \sum_C \mathrm{ord}_C(f)[C] - \sum_\sigma(\epsilon_\sigma \int_{X_\sigma} \log|f| d\mu_\sigma)[X_\sigma]$ と定義する。準同型 $K(X_K)^\times \ni f \mapsto (f) \in \mathrm{Div}(\overline{X})$ の余核を$\overline{X}$の Arakelov 因子類群と言い、$\mathrm{Cl}(\overline{X})$ と書くことにする。

次に、$\overline{X}$上の metrized 直線束とは、X上の可逆層 L と 各$\sigma \in S_\infty$に対する直線束 $L_\sigma := L \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{K_\sigma}$ ($\overline{K_\sigma} \simeq \mathbf{C}$) 上の hermite 計量 $||\cdot||_\sigma$で、与えられた $d\mu_\sigma$ に関する admissible 条件

$$\partial\overline{\partial} \log ||s||^2 dz \wedge d\overline{z} = 2\pi i \cdot \deg(L_K) d\mu_\sigma, \quad s \in H^0(X_\sigma, L_\sigma)$$

を満たすものの pair $\overline{L} := (L, (||\cdot||_\sigma)_{\sigma \in S_\infty})$ のことと定義し、その isometry 類のなす abel 群を $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ と表す。ここで、下の付記にみるように admissible

な計量は常に存在する。Arakelov 因子 $D=\sum_C n_C[C]+\sum_\sigma r_\sigma[X_\sigma]$ に対し、metrized 直線束 $\mathcal{O}_{\overline{X}}(D):=(\mathcal{O}_X(D_f),(||\cdot||_\sigma))$ が、$D_f:=\sum_C n_C[C]$, 計量は admissible Green metric $\times\exp(-r_\sigma/\epsilon_\sigma)$ として定まる。逆に、metrized 直線束 $\overline{L}=(L,(||\cdot||_\sigma))$ に対し、Arakelov 因子 $D=\sum_C \mathrm{ord}_C(s)[C]-\sum_\sigma(\epsilon_\sigma\int_{X_\sigma}|s|d\mu_\sigma)[X_\sigma]$ $(s\in H^0(X,L)=f_*L)$ の類が s によらず定まり、$\mathrm{Cl}(\overline{X})$ と $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ の同型を与える。

付記：Admissible Green metrics. Xを種数 gの compact Riemann 面とし、X上に hermite 計量 (C^∞ (1,1)-form)$d\mu$で、$\int_X d\mu=1$ なるものが与えられているとする。 X上の直線束 L に対し、L 上の hermite 計量 $||\cdot||$ が $d\mu$ に関して admissible であるとは、L の meromorphic section s に対して、

$$\partial\overline{\partial}\log||s||^2dz\wedge d\overline{z}=2\pi i\cdot\deg(L)d\mu$$

が成り立つことと定義する。次の Arakelov による定理は、admissible な計量の存在と一意性 (scalar 倍を除く) を保証する。

定理 4.1.(Arakelov([A])) 記号は上の通り。$P\in X$とする。このとき、次をみたす関数 $G(P,z), z\in X$ が唯一つ存在する。
G1) $G(P,z)$ は zについて非負値 C^∞関数で、$z=P$で唯一つの simple zero をもつ。
G2) $\partial\overline{\partial}\log G(P,z)dz\wedge d\overline{z}=\pi i\,d\mu,\ \ z\neq P.$
G3) $\int_X\log G(P,z)d\mu=0.$

実際、$Q\in X$に対し、$\mathcal{O}_X(Q)$ 上の metric $||\cdot||$ を、

$$||1||(P)=G(P,Q),\ \ P\in X$$

により定めれば、$||\cdot||$ は admissible である。tensor 積をとることで、一般の因子 Dについて $\mathcal{O}_X(D)$ 上に admissible な計量が定まる。これを Geen metric という。
次に、X上の canonical metric を定義しよう。$g>0$ とする。$H^0(X,\Omega_X)$ 上の内積 $\langle\omega,\omega'\rangle:=\frac{i}{2}\int_X\omega\wedge\overline{\omega'}$に関する正規直交基底$\omega_1,\cdots,\omega_g$をとり、$d\mu:=\frac{i}{2g}\sum_{i=1}^g\omega_i\wedge\overline{\omega_i'}$とおくと、$\int_X d\mu=1$ が成り立つ。この計量 $d\mu$を X上の canonical metric という。これは、$\omega_1,\cdots,\omega_g$により定まる周期写像 $X\to J(X)=H^0(X,\Omega_X)^*/H^1(X,\mathbf{Z})=\mathbf{C}^g/\Lambda$ において、$\mathbf{C}^g$の flat metric を引き戻したもの $\times g$ と一致する。この metric は次の有用性をもつ。今、$\mathbf{C}$ に標準的な hermite 計量を入れ、$\mathcal{O}_X(P)$ に $d\mu$に関する Green metric を入れる。Pにおける留数

$\Omega_X(P) := \Omega_X \otimes \mathcal{O}_X \to \mathbf{C}$ が isometry となるようにΩ_Xに計量を入れるとき、この計量は canonical metric $d\mu$に関して admissible になる。

(2) Arakelov 交点形式. $\overline{X} = (X, (d\mu_\sigma))$ を semi-stable arithmetic surface X と Riemann 面 $X_\sigma(\sigma \in S_\infty)$ 上の canonical metric $d\mu_\sigma$ ((1) の付記) の pair とする。Arakelov 因子 D_1, D_2に対し、交点数 $\langle D_1, D_2\rangle \in \mathbf{R}$ の定義を与えよう。D_i は既約ないし X_σとしてよい。$C \in X^1$ は、$f(C) = S$のとき horizontal、$f(C) = P \in S_0$ のとき vertical という。X_σは vertical とみる。

1) $D_2 = X_\sigma$のとき： D_1が vertical なら、$\langle D_1, X_\sigma\rangle = \langle X_\sigma, D_1\rangle := 0$, D_1 が horizontal なら、$\langle D_1, X_\sigma\rangle = \langle X_\sigma, D_1\rangle = \epsilon_\sigma \deg(D_1|X_K)$ と定める。

2) $D_1, D_2 \in X^1$ のとき： 有限部分 $\langle D_1, D_2\rangle_f$と無限部分 $\langle D_1, D_2\rangle_\infty$に分け、$\langle D_1, D_2\rangle := \langle D_1, D_2\rangle_f + \langle D_1, D_2\rangle_\infty$ と定義する。
有限部分は、通常の交点数 $\langle D_1, D_2\rangle := \sum_P \log \#(\mathcal{O}_{X,P}/(f_{1,P}, f_{2,P}))$ で定義する。 ここで、Pは $\dim \mathcal{O}_{X,P} = 2$ なる Xの点をわたり、$f_{i,P}$は D_iの Pにおける局所方程式。
無限成分は、D_1または D_2が vertical なら、$\langle D_1, D_2\rangle = 0$ と定義。両方 horizontal のとき、$P_i \in X(K(D_i))$ を D_iの generic point とする。各$\sigma \in S_\infty$に対し、σの延長である $K(D_i)$ の $\mathbf{C}$ への埋め込みは $r_i^\sigma := [K(D_i) : K]$ 個あり、それらによる P_iの像を $P_{i,j}^\sigma$, $1 \le j \le r_i^\sigma$, とする。このとき、

$$\langle D_1, D_2\rangle := \sum_{\sigma \in S_\infty} \sum_{j=1}^{r_1^\sigma} \sum_{k=1}^{r_2^\sigma} -\epsilon_\sigma \log G_\sigma(P_{1,j}^\sigma, P_{2,k}^\sigma)$$

と定義する。ここで、$G_\sigma(P, Q)$ は計量 $d\mu_\sigma$に関し、定理 4.1 で定まる Green 関数。 一般の Arakelov 因子については、linear に拡張して定める。対応する metrized 直線束に対しても、$\langle \overline{L_1}, \overline{L_2}\rangle$ などと記す。

定理 4.2.(Arakelov[A]) 上で定義した pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は、$\mathrm{Cl}(\overline{X}) = \mathrm{Pic}(\overline{X})$ 上の対称、双一次形式へ一意的に拡張される。

(3) Volume form と Riemann-Roch の定理. $\overline{X}$上の metrized 直線束 $\overline{L} = (L, (||\cdot||_\sigma))$ に対する Euler 標数の類似物は、$||\cdot||_\sigma$から決まる $H^i(X, L) \otimes \mathbf{R}$ 上の測度について、$-\log \mathrm{covol}(H^0(X, L)) + \log \mathrm{covol}(H^1(X, L))$ を考えることだろう。しかし、一般に各 $H^i \otimes \mathbf{R}$ 上にこのような標準的な測度の存在はいえない。Faltings([F1]) は、"formal difference $H^0(X, L) \otimes \mathbf{R} - H^1(X, L) \otimes \mathbf{R}$" の上には標準的な測度が存在することを示し、それを用いて Euler 標数の定

義を与えた。

Xを種数$g>0$の compact Riemann 面、$d\mu$をX上の canonical metric とする。Lを$d\mu$に関し admisible なhermite 計量$||\cdot||$((1) 付記) をもつX上の直線束とする。$\lambda(L) := \mathrm{Hom}(\bigwedge H^1(X,L), \bigwedge H^0(X,L)) = \bigwedge H^0(X,L) \otimes \bigwedge H^1(X,L)^{\otimes(-1)}$ とおく。但し、d 次元複素 vector 空間Vに対し、$\bigwedge V = \bigwedge^d V$ とおく。このとき、次が大切な定理である。

定理 4.3.(Faltings([F1])) 次の条件をみたすように、$\lambda(L)$ 上に標準的な hermite 計量が唯一つ入る。
1) L の isometry は$\lambda(L)$ の isometry を引き起こす。
2) L 上の計量が $c>0$ 倍されると、$\lambda(L)$ 上の計量は $c^{\chi(L)}$ ($\chi(L) = \deg(L) + 1 - g$) 倍される。
3) 完全列 $0 \to \mathcal{O}_X(D-P) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X(D)[P] \to 0$ において、$\mathcal{O}_X(D-P), \mathcal{O}_X(D)$ に admissible Green metric を入れ、$\mathcal{O}_X(D)[P]$ 上にその商となる計量を入れる。このとき、上の完全列から得られる同型 $\lambda(\mathcal{O}_X(D)) \simeq \lambda(\mathcal{O}_X(D-P)) \otimes \mathcal{O}_X(D)[P]$ は isometry である。
4) $\lambda(\Omega_X) \simeq \bigwedge^g H^0(X,\Omega_X)$ 上の計量は、$H^0(X,\Omega_X)$ 上の標準内積 ((1) 付記) より得られるものと一致する。

XをS上の semi-stable arithmetic surface とし、各$X_\sigma(\sigma \in S_\infty)$上に canonical metric $d\mu_\sigma$ を与える。$\overline{L} = (L, ||\cdot||_\sigma)$ を$\overline{X}$上の admissible metrized 直線束とする。Faltings の定理により定まる $\lambda(L_\sigma) = \bigwedge H^0(X_\sigma, L_\sigma) \otimes \bigwedge H^1(X_\sigma, L_\sigma)^{\otimes(-1)}$ 上の hermite 計量は、$H^0(X_\sigma, L_\sigma)$, $H^1(X_\sigma, L_\sigma)$ 上に共通の定数倍を除いて、(非標準的な)Haar 測度を与える。それをμ_σ^0,μ_σ^1とすると、$H^i(X,L) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} = \prod_{\sigma \in S_\infty} H^i(X,L) \otimes_{\mathcal{O}_K} K_\sigma$上に測度 $\mu^i := \prod_\sigma \mu_\sigma^i (i=0,1)$ を入る。
ここで、一般の有限生成 $\mathcal{O}_K$-加群 Mと $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ 上の Haar 測度μに対し、

$$\chi(M,\mu) := -\log(\mathrm{vol}_\mu(M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/M)/\#M_{tors}) + \mathrm{rank}_{\mathcal{O}_K}(M) \log \mathrm{vol}(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathcal{O}_K),$$

$M_{tors} = M$の torsion part, $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathcal{O}_K) = |\Delta_K|^{1/2}$ とおく。 以上のもと、$\overline{L}$の Euler 標数を

$$\chi(\overline{L}) := \chi(H^0(X,L),\mu^0) - \chi(H^1(X,L),\mu^1)$$

と定義する。
Relative dualizing sheaf $\omega_{X/S}$は、各X_σ上の余接束 Ω_{X_σ}を導くが、これには、(1) の付記で述べた Green metric を入れて metrized 直線束 $\varpi_{X/S}$とみなす。$\mathcal{O}_X$上に自明な計量を入れた metrized 直線束を $\mathcal{O}_{\overline{X}}$と表す。このとき、次が $\overline{X}$ 上の Riemann-Roch の定理である。

定理 4.4.(Falings([F1])) $\chi(\overline{L}) = \frac{1}{2}\langle \overline{L}, \overline{L} \otimes \overline{\omega}^{\vee}_{X/S}\rangle + \chi(\mathcal{O}_{\overline{X}})$.

この節は、[F1], [Sz] を参考にして書いた。一般次元への高次元化については、本 [F2], [So] を参照。 最後に２つコメントを述べて終わります。

(1) このノートでのべている視点は代数体と関数体の類似という現代の数論的代数幾何の源流の考え方である。この類似ではある意味で、「素数の個性」を無視し、２も３も５も皆没個性の点とみなし、数論を scheme 論+Hermite 幾何ないし adele 幾何の一部とみなしてしまう見方である。一方、Gauss の平方剰余の相互律のようなものは、２は法７の平方剰余だが、法５では非剰余だとか、p は法 qで平方剰余なら qは法 p で平方剰余か、などという言わば素数の個性に依存した相互関係、絡み合いを問題にしたものだったのである。筆者は、素数と結び目、代数体と３次元 (実) 多様体の類似という視点から、Gauss の数学の別方向への発展があるのではないかと想っている。

(2) 3 節における zeta 関数の議論は 4 節の数論的曲面の場合に拡張されるだろうか？ ２次元の場合、より興味深いのは 0-cycle(codim = 2) の Arakelov Chow 群の方である。それは１次元の場合の類体論と zeta 関数の関係と加藤 - 斎藤の高次元類体論から推測すれば、数論的曲面の Hasse zeta 関数が 0-cycle の Arakelov Chow 群上でしかるべき関数を積分することにより表せることが期待されるからである。しかし高次元の場合、積分領域に cycle に対する Green current の空間が現れる困難がある。
古田さんのお話では、3 節の双対性の定式化は無限次元の電磁双対性と似ているという。 また、3 節で現れた regulator という概念は代数的 K 群を用いて高次元にも拡張され (Bloch, Beilinson)、それは低次元トポロジーで重要な Chern-Simons 類と密接に関連している (cf. [DHZ],[RS])。3 節最後に述べた類数公式の広大な一般化は、代数多様体の L-関数の特殊値に関する Bloch-加藤の予想で、数論的指数定理の研究目標であろう。
「指数定理からゲージ理論へ」の勉強会に参加した若い方々が、無限次元の幾何学、解析学の舞台に、未来の数論をつくるとしたらどんなにか素晴らしいことであろう。

文献

[A]S. Arakelov, An intersection theory for divisors on an arithmetic surface. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974), 1179–1192.
[B]A. Borisov, Convolution structures and arithmetic cohomology, preprint, 2001.
[DHZ] J. Dupont, R. Hain, S. Zucker, Regulators and characteristic classes of flat

bundles. The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, 1998), 47–92, CRM Proc. Lecture Notes, 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
[F1]G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces. Ann. of Math. (2) 119 (1984), 387–424.
[F2]——-, Lectures on arithmetic Riemann-Roch theorem, Princeton Univ., 1991.
[G-S]G.van der Geer, R. Schoof, Effectivity of Arakelov divisors and the theta divisor of a number fields, to appear Selecta Math.
[古] 古田幹雄, 指数定理 I, 岩波, 1999.
[加] 加藤和也, 講義ノート, 1985.
[RS]A. Reznikov, N. Schappacher, Regulators in analysis, geometry and number theory, Progress in Mathematics, 171. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.
[So]C. Soulé, Lectures on Arakelov geometry, Cambridge Univ. Studies, 33, 1992.
[Sz]L. Szpiro, Présentation de la théorie d'Arakélov, Current trends in arithmetical algebraic geometry, 279-293, Contemp. Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. (Arakelov intersection theory on arithmetic surfaces, Arithmetic Algebraic Geometry シンポジウム, (藤原一宏記) 1987 年 1 月, 於 東大理).
[上] 上野健爾, 代数幾何 3, 岩波, 1998.
[W]A. Weil, Sur l'analogie entre les corps de nombre algebriques et corps de fonction algébriques, Revue scientifique, 77, (1939), 104-106.
[吉] 吉田朋好, ディラック作用素と指数定理, 共立, 1998.