2003 年 10 月 6 日 中央大学モジュライセミナー

離散付値環上のスキームの不分岐巡回被覆

土屋和由（中央大学）

序

体の上の分岐の理論は Hilbert 以来，盛んに研究がなされ多くの有用な結果が得られている．特に，体の上の巡回拡大に関してはその表示が具体的に以下のように与えられている．

K を体，$n > 1$ を整数とする．ζ を 1 の原始 n 乗根とする．今 $\zeta \in K$ と仮定する．このとき，任意の K の n 次巡回拡大 L に対して，$a \in K$ が存在して $L = K(b)$ が成立する．ただし b は方程式 $T^n - a = 0$ の根である（ Kummer 理論 ）．

p を素数，n を正の整数とする．K を標数 p の体とする．このとき，任意の K の p^n 次巡回拡大 L に対して，$\boldsymbol{a} \in W_n(K)$ が存在して $L = K(\boldsymbol{b})$ が成立する．ただし $\boldsymbol{b}$ は方程式 $\boldsymbol{T}^p - \boldsymbol{T} = \boldsymbol{a}$ の根である（ Artin-Schreier-Witt 理論 ）．ここで $W_n(K)$ は K を係数に持つ長さ n の Witt vector のなす群，$-$ は $W_n(K)$ の逆演算である．

我々は体の上だけでなく，より一般に scheme の上の不分岐巡回被覆について考える．すなわち本稿における我々の研究対象は S-scheme の上の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-torsor，言い換えると S-scheme の上の m 次不分岐巡回被覆である．ただし S は scheme，$m > 1$ は整数である．これらの具体的記述を与えるためにはどのようにすればよいだろうか．上で述べた体の上の巡回拡大の具体的表示を与えるための鍵となるのは Hilbert 90 と呼ばれる $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), L^\times) = 0$ および $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), W_n(L)) = 0$ という事実である．$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-torsor の具体的表示に関しても，実は cohomology を用いて与えることが出来る．実際 S-scheme X に対して $\mathrm{PHS}(X/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) =$ $\{$ X の上の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-torsor の同型類 $\}$ とおくとき，

$$\mathrm{PHS}(X/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1_{\mathrm{fl}}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{fl}}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

が成立する (cf. Raynaud [2]).

いくつかの場合に関しては，その具体的な表示がよく知られている．$n > 1$ を整数，ζ を 1 の原始 n 乗根とするとき $\mathbb{Z}[n^{-1}, \zeta]$-scheme X の上の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-torsor は $X_{\text{ét}}$ 上の可換群の層の完全列（Kummer 完全列）

$$0 \longrightarrow \mu_{n,X} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{n} \mathbb{G}_{m,X} \longrightarrow 0$$

を用いて記述できる．特に $X = \mathrm{Spec}\, K$（ K は体 ）のとき，これは体の上の Kummer 理論に他ならない．さらに p を素数，n を正の整数とするとき $\mathbb{F}_p$-scheme X の上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor は $X_{\text{ét}}$ 上の可換群の層の完全列（Artin-Schreier-Witt 完全列）

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow W_{n,X} \xrightarrow{F-1} W_{n,X} \longrightarrow 0$$

を用いて記述できる．特に $X = \operatorname{Spec} K$（ K は体 ）のとき，これは体の上の Artin-Schreier-Witt 理論に他ならない．

本稿では以下の場合を考察する．p を素数，ζ_i を 1 の原始 p^i 乗根で，任意の i に対して $\zeta_i^p = \zeta_{i-1}$ をみたすものとする．$\lambda_i = \zeta_i - 1$ とおく．n を正の整数とする．このとき $A := \mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ は λ_n を uniformising parameter とする離散付値環であり，分数体は $K := \mathbb{Q}(\zeta_n)$，剰余体は $k := A/(\lambda_n) = \mathbb{F}_p$ である．

我々の目的は A-scheme X の上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor の具体的記述を与えることである．代数体または局所体の上の整数論においてはそれらの剰余体の上の合同関係を見ることが有用であった．したがって有限体，Dedekind 整域または離散付値環（一般に Dedekind scheme ）の上の代数幾何学の研究は整数論において大事なものであり，近年，その研究が大きく進展している．

torsor の具体的記述を与えるために以下の事実に着目する．Y を $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor とするとき，$Y \otimes_A k$ は $X \otimes_A k$ 上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor であり，$Y \otimes_A K$ は $X \otimes_A K$ 上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor である．したがって Kummer 理論および Artin-Schreier-Witt 理論を統一する理論を用いることにより torsor を記述することが出来る．実際，Kummer 理論または Artin-Schreier-Witt 理論で用いる方法と同様の方法を用いればよい．

以下 Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論について簡単に解説する．この理論の鍵は $(\operatorname{Spec} A)_{\text{ét}}$ 上の可換群の層の完全列（Kummer-Artin-Schreier-Witt 完全列）

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{W}_n \xrightarrow{\Psi_n} \mathcal{V}_n \longrightarrow 0$$

である．この完全列は special fiber として Artin-Schreier-Witt 完全列をもち，generic fiber として Kummer 完全列をもつ．Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論は $n = 1$ の場合（Kummer-Artin-Schreier 理論）を Waterhouse [7] および Sekiguchi-Oort-Suwa [3] によって与えられ，一般の場合を Sekiguchi-Suwa [4], [6], [5] によって定式化されている．また $n = 2$ の場合のある具体的な定式化が Green-Matignon [1] によって独立に与えられている．この完全列を用いることにより，我々は A-scheme の上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor の具体的記述を与えることができる（ cf. 1.2 ）．

次に我々は A-scheme X の上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor の相対的な記述を与える．今 group A-scheme の準同型 $\alpha^F : \mathcal{W}_n \to \mathbb{G}_m^n$ より，X の上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor の同型類 $[Y]$ から μ_{p^n}-torsor の同型類 $[Y']$ への対応が定まる．このとき A-scheme の射 $Y \to Y'$ が定まるが，実はこの射が有限回の Néron blow-up の合成によって与えられることが分かる．すなわち，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor は μ_{p^n}-torsor の有限回の Néron blow-up の合成で与えられる（ cf. 2.2 ）．

1　$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor の具体的記述

1.1. n を正の整数，$A = \mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ とする．X を A-scheme とする．このとき完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{W}_n \xrightarrow{\Psi_n} \mathcal{V}_n \longrightarrow 0$$

より，cohomology 完全列

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow\ &\Gamma(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{W}_n) \xrightarrow{\Psi_n} \Gamma(X, \mathcal{V}_n) \\
\longrightarrow\ &H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, \mathcal{W}_n) \xrightarrow{\Psi_n} H^1_{\text{ét}}(X, \mathcal{V}_n).
\end{aligned}
$$

を得る．$\mathrm{PHS}(X/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ より，上の完全列を用いることにより torsor の具体的記述を与えることが出来る．実際，以下の定理を得る．

定理 1.2. X を A-scheme とし，$\mathcal{U} = \{U_j\}$ を X のある affine 開被覆とする．$\boldsymbol{g}_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{W}_n)$ を $\Psi_n([\boldsymbol{g}_{ij}]) = 0$ をみたす 1-cocycle とする．このとき任意の j に対して $\boldsymbol{b}_j \in \Gamma(U_j, \mathcal{V}_n)$ が存在して，$U_j \cap U_i$ 上で $\Psi_n(\boldsymbol{g}_{ij}) = (\Lambda_0^G(\boldsymbol{b}_j, I^G(\boldsymbol{b}_i)), \ldots, \Lambda_{n-1}^G(\boldsymbol{b}_j, I^G(\boldsymbol{b}_i)))$ が成立する．$\boldsymbol{h} \in \Gamma(X, \mathcal{V}_n)$ とする．このとき X 上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor $Y \to X$ は局所的に

$$\Psi_n(\boldsymbol{z}_j) = (\Lambda_0^G(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{h}), \ldots, \Lambda_{n-1}^G(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{h})) \quad \text{on} \quad U_j \times \mathbb{A}^n$$

で定義される．貼りあわせは

$$(\Lambda_0^F(\boldsymbol{z}_j, I^F(\boldsymbol{z}_i)), \ldots, \Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{z}_j, I^F(\boldsymbol{z}_i))) = (\boldsymbol{g}_{ij}) \quad \text{on} \quad (U_j \times \mathbb{A}^n) \cap (U_i \times \mathbb{A}^n)$$

で与えられ，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の作用は

$$(\boldsymbol{z}_j, \boldsymbol{s}) \longmapsto (\Lambda_0^F(\boldsymbol{z}_j, \boldsymbol{s}), \ldots, \Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{z}_j, \boldsymbol{s}))$$

で定義される．ここで $\Lambda_0^F, \ldots, \Lambda_{n-1}^F$ および $\Lambda_0^G, \ldots, \Lambda_{n-1}^G$ はそれぞれ $\mathcal{W}_n$ および $\mathcal{V}_n$ 上の演算を定義する多項式であり，$I_0^F, \ldots, I_{n-1}^F$ および $I_0^G, \ldots, I_{n-1}^G$ はそれぞれ $\mathcal{W}_n$ および $\mathcal{V}_n$ 上の逆元を定義する多項式である．

1.3. B を A 代数とする．ここで B は局所環である，または p が B でベキ零であると仮定する．このとき $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\, B, \mathcal{W}_n) = 0$ が成立する．よって同型

$$\mathrm{Coker}[\Psi_n : \mathcal{W}_n(B) \longrightarrow \mathcal{V}_n(B)] \xrightarrow{\sim} H^1(\mathrm{Spec}\, B, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を得る．したがって，任意の B の p^n 次不分岐巡回拡大 C に対して，射 $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathcal{V}_n$ が存在して

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spec}\, C & \longrightarrow & \mathcal{W}_n \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_n} \\
\mathrm{Spec}\, B & \xrightarrow{f} & \mathcal{V}_n
\end{array}
$$

が cartesian になることがわかる．言い換えると，任意の B の p^n 次不分岐巡回拡大 C に対して，$\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathcal{V}_n(B)$ が存在して $C = B[\boldsymbol{\alpha}] = B[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]$ が成立する．ここで $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ は方程式 $\Psi_n(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{b}$ の根である．

1.4. B を A 代数とする．ここで B は A 上忠実平坦な Noether 的狭義 Hensel 局所環であると仮定する．X を連結，平坦，固有 B-scheme とする．自然な全射 $A \to A_0 := A/(\lambda_1)$ から定まる閉移入 $\operatorname{Spec} A_0 \to \operatorname{Spec} A$ を ι と記す．このとき，同型

$$H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \{([\mathcal{L}_0], \ldots, [\mathcal{L}_{n-1}]) \in \operatorname{Pic}^0(X)^n | \ (**) \ \}$$

を得る．ただし，条件 $(**)$ は

$$\begin{aligned}
&[\iota_X{}^*\mathcal{L}_0] = [\mathcal{O}_{X_0}],\ \ {F_1}_*([\mathcal{L}_0]) = [\iota_X{}^*\mathcal{L}_1],\ \ldots,\ {F_{n-1}}_*([\mathcal{L}_0], \ldots, [\mathcal{L}_{n-2}]) = [\iota_X{}^*\mathcal{L}_{n-1}],\\
&[\mathcal{L}_0{}^{\otimes p}] = [\mathcal{O}_X],\ \ [\mathcal{L}_1{}^{\otimes p}] = [\mathcal{L}_0],\ \ldots,\ [\mathcal{L}_{n-1}{}^{\otimes p}] = [\mathcal{L}_{n-2}].
\end{aligned}$$

である．ここで $X_0 = X \otimes_B (B/\lambda_1 B)$ である．

2 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor の Néron blow-up を用いた記述

2.1. A-scheme X に対して，可環図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{W}_n \arrow[r, "\Psi_n"] \arrow[d, "\alpha^F"'] & \mathcal{V}_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^G"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{p^n} \arrow[r] & \mathbb{G}_m^n \arrow[r, "\Theta_n"] & \mathbb{G}_m^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

から可環図式

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathcal{W}_n) \arrow[r, "\Psi_n"] \arrow[d, "\alpha^F"'] & \Gamma(X, \mathcal{V}_n) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^G"'] & H^1(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X, \mathcal{W}_n) \arrow[r, "\Psi_n"] \arrow[d, "\alpha^F"'] & H^1(X, \mathcal{V}_n) \arrow[d, "\alpha^G"'] \\
\Gamma(X, \mathbb{G}_m^n) \arrow[r, "\Theta_n"] & \Gamma(X, \mathbb{G}_m^n) \arrow[r] & H^1(X, \mu_{p^n}) \arrow[r] & H^1(X, \mathbb{G}_m^n) \arrow[r, "\Theta_n"] & H^1(X, \mathbb{G}_m^n).
\end{tikzcd}$$

が誘導される．したがって $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor の同型類 $[Y]$ に対して，μ_{p^n}-torsor の同型類 $[Y']$ が対応する．このとき A-scheme の射 $Y \to Y'$ が定まるが，実はこの射が有限回の Néron blow-up の合成によって与えられることが分かる．すなわち，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor は μ_{p^n}-torsor の有限回の Néron blow-up の合成で与えられる．

定理 2.2. X を平坦，有限型 A-scheme とする．Y を X の上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torsor とし，Y' を Y に対応する X の上の μ_{p^n}-torsor とする．このとき A-scheme の射 $Y \to Y'$ を Néron blow-up の有限回の合成として与えることが出来る．

実際，群スキームの準同型 $\alpha^F : \mathcal{W}_n \to \mathbb{G}_m^n$ が有限回の Néron blow-up の合成で与えられることが Waterhouse-Weisfeiler の定理 [8, Theorem 1.4] よりわかる．簡単に言うと，射 $Y \to Y'$ は局所的に $\alpha^F : \mathcal{W}_n \to \mathbb{G}_m^n$ で与えられていると見ることが出来るので，α^F を具体的に Néron blow-up を用いて記述することにより，$Y \to Y'$ を与えることが出来る．

参考文献

[1] B. Green, and M. Matignon, Liftings of galois covers of smooth curves, Compositio Math., 113, 237-272(1998)

[2] M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, Lect. Notes Math. 119, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1970

[3] T. Sekiguchi, and F. Oort, and N. Suwa, On the deformation of Artin-Schreier to Kummer, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série 22, 345-375(1989)

[4] T. Sekiguchi, and N. Suwa, Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt, C. R. Acad. Sci. Paris, t.319, Série I, 105-110(1994)

[5] T. Sekiguchi, and N. Suwa, On the Unified Kummer-Artin-Schreier-Witt theory, Prépublications du laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux, Prépublication n° 111(1999)

[6] T. Sekiguchi, and N. Suwa, A note on extensions of algebraic and formal groups IV, Kummer-Artin-Schreier-Witt theory of degree p^2, Tohoku Math. J., 53, 203-240(2001)

[7] W. Waterhouse, A unified Kummer-Artin-Schreier sequence, Math. Ann., 277, 447-451(1987)

[8] W. Waterhouse, and B. Weisfeiler, One-dimensional affine group schemes, J. of Alg., 66, 550-568(1980)

土屋和由
中央大学大学院 理工学研究科 数学専攻 博士課程後期課程
112-8551 東京都文京区春日 1-13-27
e-mail address : kazu@grad.math.chuo-u.ac.jp