

# 加法群から乗法群への変形群スキームの加法群による拡大について

中大理工 (D.C.) 谷戸 光昭 (Mistuaki YATO)

## 1. 序

一般に  $A$  を可換環,  $\lambda \in A$  とする.  $\mathbb{G}_{a,A}$  を  $A$  上の加法的群スキーム,  $\mathbb{G}_{m,A}$  を  $A$  上の乗法的群スキームとする (本稿では単に加法群, 乗法群と呼ぶ.) このとき, 加法群  $\mathbb{G}_{a,A}$  の乗法群  $\mathbb{G}_{m,A}$  への変形を与える群スキーム  $\mathcal{G}^{(\lambda)}$  は次のように定義される:  $\mathcal{G}^{(\lambda)} = \text{Spec } A[T, \frac{1}{1+\lambda T}]$ . ここで, 群の算法は  $T \mapsto \lambda T \otimes T + T \otimes 1 + 1 \otimes T$  により与えられる. 特に,  $\lambda \in A^\times$  ならば同型  $\mathcal{G}^{(\lambda)} \simeq \mathbb{G}_{m,A}$  が得られ,  $\lambda = 0$  ならば  $\mathcal{G}^{(\lambda)}$  は  $\mathbb{G}_{a,A}$  に他ならない.  $\mathcal{G}^{(\lambda)}$  の  $\mathbb{G}_{a,A}$  による可換な拡大の同型類全体を  $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$  と書く. これが群をなすことはよく知られている. この群が今回の研究対象である.  $\mathcal{G}^{(\lambda)}$  の  $\mathbb{G}_{a,A}$  への作用が自明なものだけを扱う.

Weisfeiler [5] は  $A$  が整域の時に  $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$  の研究を行っており, 特に体を含む整域のときに群  $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$  の特徴付けを与えている. 関口-諏訪 [2] では  $A$  が離散付値環のときに,  $\mathcal{G}^{(\lambda)}$  の  $\mathbb{G}_{a,A}$  への作用が自明でない場合も含めて研究し, 結果を出している.

一方, 関口-諏訪 [3] において,  $A$  が  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数 ( $p$  は素数) のときに  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$  と  $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$  の群構造が特徴付けられている. ここで,  $\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}$  や  $\widehat{\mathbb{G}}_{m,A}$  は形式群スキーム. その主結果は第四節の前半で紹介するが, 今簡単に述べておくと,  $W(A)$  ( $A$  の元を成分とする Witt ベクトルのなす環) のある自己準同型の核と余核に  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$  と  $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$  がそれぞれ同型になる, という非常にスマートなものである. この理論のポイントは, 本質的に Artin-Hasse exponential series を拡張した冪級数のみが homomorphism となりうる, というところにある. なお,  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$  や  $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$  のいわゆる「代数群バージョン」の結果はその系として導かれる.

今回,  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数上において  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  と  $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  の群構造を特徴付けることができた. 主結果は関口-諏訪 [3] と同様にスマートで,  $A^\mathbb{N}$  のある自己準同型の核, 余核に  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  と  $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  がそれぞれ同型になるというものである. この理論のポイントは, 本質的にある種の logarithm を変形した冪級数のみが homomorphism となりうる, というところにある. なお,  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$  や  $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$  に対する結果はその系として導かれる (第二節にて主定理およびその系の紹介を行う.)

主定理の証明は至って素朴である. 特に,  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  に対する結果は未定係数法による直接計算で導かれる. 一方, アフィンスキーム上の  $\mathbb{G}_a$ -torsor が自明になることから  $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$  (Hochschild cohomology) となるので,  $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  の特徴付けはもっぱら 2-cocycle の計算によって成される. 特に, 2-cocycle の正規化の際に Lazard [1] による補題が重要な役割を担う (第三節にて証明の概略を解説する.)

さて, いわば「指数関数」がその主幹を成していた  $\mathbb{G}_{m,A}$  に対する結果と「対数関数」が主幹を成す  $\mathbb{G}_{a,A}$  に対する結果との関係も非常に気になるところである. これについては, 双数の環を導入することによって加法群を乗法群の Lie 環とみなし, 関口-諏訪 [3] の結果と今回

の結果との結び付きを明確に与えることができた . なお , これは同時に  $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  と  $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  に対する結果の別証明を与えている ( 第四節の後半にて触れる . )

以下 , 特に断らない限り素数  $p$  を固定し ,  $A$  を  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数とする .  $P = \{p^e; e \geq 0\}$  とおく . また  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  である .

## 2. 主定理

この節では我々の主定理について述べる . まずは , 避けて通れない多項式や写像の定義から始める .  $A$  を  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数 ,  $\lambda \in A$  とする .

2.1.  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$  (resp.  $A^{(\mathbb{N})}$ ) に対し ,  $A^{\mathbb{N}}$  (resp.  $A^{(\mathbb{N})}$ ) の自己準同型  $\Psi$  を

$$\Psi : \mathbf{a} \mapsto (-(-\lambda)^{p^{i+1}-p^i} a_i + pa_{i+1})_{i \geq 0}$$

で定義する .

$\Lambda$  を不定元とする . 任意の  $r \geq 0$  に対し ,  $\mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda]$  係数の多項式  $L_r(\Lambda; T)$  と  $\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$  を , それぞれ

$$L_r(\Lambda; T) = p^r \sum_{i=1}^{p^{r+1}-1} \frac{(-\Lambda)^{i-1}}{i} T^i \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][T],$$

$$\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y) = -\frac{L_{p,r}(\Lambda; X) + L_{p,r}(\Lambda; Y) - L_{p,r}(\Lambda; \Lambda XY + X + Y)}{(-\Lambda)^{p^{r+1}-1}} \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][X, Y]$$

で定義する .  $\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$  は矛盾なく定義され , 関数等式

$$\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; Y, Z) + \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, \lambda Y Z + Y + Z) = \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; \lambda XY + X + Y, Z) + \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$$

を満たす .

2.2. 群準同型  $\eta^0 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A[[T]]$  と  $\eta^1 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  を , それぞれ

$$\eta^0 : \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[ \sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right],$$

$$\eta^1 : \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)$$

で定義する ( 前節にて「ある種の logarithm を変形した冪級数」と称したのは ,  $\eta^0$  を定義する冪級数のことである . ) このとき , 次の図式は可換 :

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\eta^0} & A[[T]] \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \partial \\ A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\eta^1} & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}). \end{array}$$

ここで,  $\partial$  は  $f(T) \mapsto f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y)$  で定義される cocycle map である. 上の可換図式から, 群準同型

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}), \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})\end{aligned}$$

が誘導される. 同様に

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}) \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})\end{aligned}$$

も誘導される.

以上の準備の下, 主定理は次のように述べられる.

**定理 2.3.** 群準同型

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}), \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})\end{aligned}$$

は全単射.

**系 2.4.** 群準同型

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}) \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})\end{aligned}$$

は全単射.

**補注 2.5.**  $A$  が  $\mathbb{Q}$ -代数のときは, 同型

$$\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \simeq \left\{ \frac{a}{\lambda} \log(1 + \lambda T); a \in A \right\},$$

を得る. ここで

$$\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{i-1}}{i} T^i \in \mathbb{Q}[[T]].$$

**例 2.6.**  $\lambda = 1$  とする. このとき  $\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$  は全単射. 従って,

$$\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathbb{G}_{m,A}, \mathbb{G}_{a,A}) = 0, \quad H_0^2(\mathbb{G}_{m,A}, \mathbb{G}_{a,A}) = 0$$

を得る.

**例 2.7.**  $\lambda = 0$  とする.  $A$  の標数が 0 の場合,  $\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$  は全射. 従って,  $H_0^2(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}) = 0$ . また, 容易な計算で

$$\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq \{aT; a \in A\} \simeq A.$$

一方,  $A$  の標数を  $p$  とすると  $\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$  は零射で,

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} a_r T^{pr} ; (a_0, a_1, \dots) \in A^{(\mathbb{N})} \right\} \simeq A^{(\mathbb{N})},$$

$$H_0^2(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[ \frac{X^{p^{r+1}} + Y^{p^{r+1}} - (X+Y)^{p^{r+1}}}{p} \right] ; (a_0, a_1, \dots) \in A^{(\mathbb{N})} \right\} \simeq A^{(\mathbb{N})}.$$

### 3. 証明の概略 ( 1 )

この節では主定理の証明の概略について述べる.  $A$  を  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数,  $\lambda \in A$  とする.

まずは  $\eta^0 : \mathrm{Ker}[\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  の全単射性だが, 単射性は明白である. 全射性は下の補題により直ちに導かれる.

**補題 3.1.**  $f(T) \in A[[T]]$  とする.  $f(T)$  が関数等式  $f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) = 0$  を満たせば, ある  $\mathbf{a} \in \mathrm{Ker}[\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}]$  が存在して  $f(T) = \eta^0(\mathbf{a})$  となる.

**証明.**  $f(T) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i T^i$  とおく. 仮定から  $c_0 = 0$  は容易.  $f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y)$  をテイラー展開し, 仮定と合わせると

$$\begin{aligned} 0 &= f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) \\ &= - \sum_{j \geq 2} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{i=m(j,k)}^k \binom{j-k+i}{j-2k+2i} \binom{j-2k+2i}{i} \lambda^{k-i} c_{j-k+i} X^k Y^{j-k} \end{aligned}$$

を得る (定数項は省いた). ここで  $m(j,k) = \max\{0, 2k-j\}$ . 以降, 未定係数法により  $f(T)$  の係数を決定していく. まず  $XY^{j-1}$  の係数を比較すると, 任意の  $j \geq 2$  に対し,

$$(j-1)\lambda c_{j-1} + j c_j = 0 \quad (1)$$

を得る. このとき,  $s \geq 0, p^s < j < p^{s+1}$  なる任意の  $s, j$  に対し,

$$c_j = \frac{p^s}{j} (-\lambda)^{j-p^s} c_{p^s} \quad (2)$$

となることが帰納的に示される. 上式は, 例えば  $\mathbb{Q}$  上での考察なら (1) から直ちに従うが,  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数上では容易でない.  $(j, p) \neq 1$  のときには, 主に二項係数の計算によって上手く回避する必要がある. さて, 上の (1) と (2) を合わせると, 任意の  $s \geq 0$  に対して

$$-(-\lambda)^{p^{s+1}-p^s} c_{p^s} + p c_{p^{s+1}} = 0 \quad (3)$$

を得る. 未定係数法で全ての関係式を詰めていくと, 最終的に (2) と (3) に帰着されることがわかる. 従って, 任意の  $r \geq 0$  に対して  $a_r = c_{p^r}$ ,  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  とおけば,  $\mathbf{a} \in \mathrm{Ker}[\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}]$  かつ

$$f(T) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[ \sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] = \eta^0(\mathbf{a}). \quad \square$$

$\eta^0 : \text{Ker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$  の全単射性は，上と下の補題を組み合わせるにより得られる．

**補題 3.2.**  $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$  とする．任意の  $r \geq 0$  に対して  $-(-\lambda)^{p^{r+1}-p^r} a_r + p a_{r+1} = 0$  が成り立つと仮定する．このとき，もし

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[ \sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] \in A[T, \frac{1}{1+\lambda T}]$$

ならば，有限個を除くすべての  $r$  について  $a_r = 0$  ．

証明．まず

$$(1 + \lambda T)^n \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[ \sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] = f(T)$$

とおく．ここで， $f(T) \in A[T]$ ， $n \geq 0$ ．今， $\deg f < p^r$  とする．両辺の  $T^{p^r}$  の係数を比較すると， $1 \leq i \leq r$  なる  $i$  について

$$a_r + \sum_{i=1}^r c_i (-\lambda)^{p^r - p^{r-i}} a_{r-i} = 0.$$

ここで  $c_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ ．仮定より， $1 \leq i \leq r$  なる  $i$  について

$$(-\lambda)^{p^r - p^{r-i}} a_{r-i} = p^i a_r.$$

$1 + \sum_{i=1}^r p^i c_i$  は  $\mathbb{Z}_{(p)}$  で逆元を持つから， $\deg f < p^r$  なる  $r$  について  $a_r = 0$ ．□

次に  $\eta^1 : \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  の全単射性である．この証明の本質は，Lazard の comparison lemma (以下「Lazard の補題」で統一) を使って 2-cocycle  $g(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  を正規化するところにある．

Lazard の補題 ([1, Lem 3])  $A$  を任意の可換環とし， $l \geq 2$  とする． $g(X, Y) \in A[X, Y]$  を，

$$\begin{cases} g(Y, Z) + g(X, Y + Z) = g(X + Y, Z) + g(X, Y), \\ g(X, Y) = g(Y, X) \end{cases}$$

を満たす次数  $l$  の斉次多項式とする．このとき，ある  $a \in A$  が存在して

$$g(X, Y) = a C_l(X, Y)$$

と表せる．ここで， $C_l(X, Y)$  は

$$C_l(X, Y) = \begin{cases} \frac{X^l + Y^l - (X + Y)^l}{p} & (l \in P) \\ X^l + Y^l - (X + Y)^l & (l \notin P) \end{cases}$$

で定義される  $\mathbb{Z}$  係数の多項式 .

補題 3.3.  $g(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  とする . このとき , ある  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$  が存在して ,  $g(X, Y)$  は  $\sum_{r=0}^{\infty} b_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)$  と cohomologous ( すなわち  $H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  の元として一致する . )

証明.  $g(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  とし ,  $g(X, Y)$  を次のように斉次式に分解する :

$$g(X, Y) = \sum_{r=l}^{\infty} g_r(X, Y).$$

$l \geq 2$  としてよい .  $g(X, Y)$  は関数等式

$$g(Y, Z) + g(X, \lambda YZ + Y + Z) = g(\lambda XY + X + Y, Z) + g(X, Y)$$

を満たすので ,  $g_l(X, Y)$  は

$$g_l(Y, Z) + g_l(X, Y + Z) = g_l(X + Y, Z) + g_l(X, Y)$$

を満たす . 従って , Lazard の補題により , ある  $a_l \in A$  が存在して  $g_l(X, Y) = a_l C_l(X, Y)$  . ここで , 任意の  $r \geq 1$  に対して

$$t_r(X, Y) = X^r + Y^r - (\lambda XY + X + Y)^r \in B^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$$

とおく .  $t_l(X, Y) \equiv X^l + Y^l - (X + Y)^l \pmod{\deg(l+1)}$  だから ,  $l \notin P$  ならば ,

$$g(X, Y) - a_l t_l(X, Y) \equiv 0 \pmod{\deg(l+1)}$$

を得る .  $l+1 \notin P$  ならば ,  $g(X, Y) - a_l t_l(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  に対して同じ議論を適用できる . 従って , 結局

$$g(X, Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X, Y) = \sum_{r=p^e}^{\infty} g'_r(X, Y)$$

という斉次式分解を得る . ここで  $e \geq 1$  . さて ,  $g'_{p^e}(X, Y)$  に対しても Lazard の補題が適用できるので , ある  $a_{p^e} \in A$  が存在して

$$g(X, Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X, Y) \equiv a_{p^e} C_{p^e}(X, Y) \pmod{\deg(p^e+1)}$$

となる . ここまでは上と変わらないが ,  $C_{p^e}(X, Y)$  の定義から , 今度は  $t_{p^e}(X, Y)$  を用いずに  $\tilde{L}_{p,e-1}(\lambda; X, Y)$  を使う ( 実は , 任意の  $r \geq 0$  に対して

$$\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y) \equiv C_{p^{r+1}}(X, Y) \pmod{\deg(p^{r+1}+1)}$$

となることが単純な計算によりわかる。)すると,次を得る:

$$g(X, Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X, Y) - a_{p^e} \tilde{L}_{p, p^e-1}(\lambda; X, Y) \equiv 0 \pmod{\deg(p^e + 1)}.$$

$\tilde{L}_{p, p^e-1}(\lambda; X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a, A})$  だから, 上式の左辺は  $Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a, A})$  の元. 従って今までの議論を繰り返すことにより, 結局  $A[[X, Y]]$  の中で

$$g(X, Y) - \sum_{\substack{r \geq l \\ r \notin P}} a_r t_r(X, Y) - \sum_{r=e}^{\infty} a_{p^r} \tilde{L}_{p, p^r-1}(\lambda; X, Y) = 0$$

を得る. 左辺の第二項は  $B^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a, A})$  の元だから, 任意の  $r \geq e-1$  に対して  $b_r = a_{p^{r+1}}$  とおけば,  $g(X, Y)$  は  $\sum_{r=e-1}^{\infty} b_r \tilde{L}_{p, r}(\lambda; X, Y)$  と cohomologous である.  $\square$

上の補題から  $\eta^1: \text{Coker}[\Psi: A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a, A})$  の全射性が従う. さて, 残されたのは  $\eta^1$  の単射性であるが, これは下の補題から得られる.

**補題 3.4.**  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$  とし,  $g(X, Y) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r \tilde{L}_{p, r}(\lambda; X, Y) \in A[[X, Y]]$  とおく. このとき,

$$g(X, Y) = f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) \quad (4)$$

となる  $f(T) \in A[[T]]$  が存在するならば, 任意の  $r \geq 0$  に対して

$$b_r = -(-\lambda)^{p^{r+1}-p^r} a_r + p a_{r+1}$$

となる  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$  が存在する.

証明. 誌面の都合上とてもすべての計算を紹介することはできない. 手法は, homomorphism を決定したときと同様, (4) 式に対して未定係数法を用いる. 詳細は [6, Lem3.6] を参照のこと.  $\square$

$\eta^1: \text{Coker}[\Psi: A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a, A})$  の全単射性は,  $g(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a, A})$  が多項式になるための条件を調べることによって得られる. やはりここでも未定係数法を用いる. 詳細は [6, Cor3.5] を参照のこと.

## 4. 証明の概略 (2)

この節では主定理の別証明について触れる. 準備として, 前半では関口-諏訪 [3] の主結果を紹介する. そして後半にて別証明の概略を解説する.  $A$  を  $\mathbb{Z}_{(p)}$  代数,  $\lambda \in A$  とする.

### 4.1. 関口-諏訪 [3] の主結果

まず Arith-Hasse exponential series を拡張した形式冪級数を定義する. 詳細は関口-諏

訪 [3, Ch2] を参照されたい .

4.1.1.  $U, \Lambda$  を不定元とし ,  $\mathbb{Q}[U, \Lambda]$  係数の形式冪級数  $E_p(U, \Lambda; T)$  を

$$E_p(U, \Lambda; T) = (1 + \Lambda T)^{\frac{U}{\Lambda}} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \Lambda^{p^k} T^{p^k} \right)^{\frac{1}{p^k} \left\{ \left( \frac{U}{\Lambda} \right)^{p^k} - \left( \frac{U}{\Lambda} \right)^{p^{k-1}} \right\}}$$

で定義する . これは Artin-Hasse exponential series

$$E_p(T) = \exp \left( \sum_{r \geq 0} \frac{T^{p^r}}{p^r} \right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$$

を用いて

$$E_p(U, \Lambda; T) = \begin{cases} \prod_{(k,p)=1} E_p(U \Lambda^{k-1} T^k)^{(-1)^{k-1}/k} & (p > 2), \\ \prod_{(k,2)=1} E_p(U \Lambda^{k-1} T^k)^{1/k} \left[ \prod_{(k,2)=1} E_p(U \Lambda^{2k-1} T^{2k})^{1/k} \right]^{-1} & (p = 2) \end{cases}$$

と表せることが示される .  $(k, p) = 1$  ならば  $(1+T)^{1/k} \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$  となることから ,  $E_p(U, \Lambda; T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U, \Lambda][[T]]$ . 特に ,  $E_p(1, 0; T) = E_p(T)$  ,  $E_p(\Lambda, \Lambda; T) = 1 + \Lambda T$  である .

$\mathbb{U} = (U_0, U_1, U_2, \dots)$  とする .  $E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U_0, U_1, U_2, \dots, \Lambda][[T]]$  を

$$E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T) = \prod_{k=0}^{\infty} E_p(U_k, \Lambda^{p^k}; T^{p^k}).$$

で定義する . さらに ,  $F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U_0, U_1, U_2, \dots, \Lambda][[X, Y]]$  を

$$F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(1 + \Lambda^{p^k} X^{p^k})(1 + \Lambda^{p^k} Y^{p^k})}{1 + \Lambda^{p^k} (X + Y + \Lambda XY)^{p^k}} \right]^{\Phi_{k-1}(\mathbb{U})/p^k \Lambda^{p^k}}$$

で定義する . ここで  $\Phi_n(\mathbb{U})$  は Witt 多項式 .

4.1.2. 群準同型  $\xi^0 : W(A) \rightarrow A[[T]]^\times$  と  $\xi^1 : W(A) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$  を , それぞれ  $\mathbf{a} \mapsto E_p(\mathbf{a}, \lambda; T)$  ,  $\mathbf{a} \mapsto F_p(\mathbf{a}, \lambda; X, Y)$  によって定義する .  $F$  を Witt 環の Frobenius 自己準同型とし ,  $F^{(\lambda)} = F - (\lambda^{p-1}, 0, 0, \dots)$  とおく . このとき , 次の可換図式を得る :

$$\begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{\xi^0} & A[[T]]^\times \\ F^{(\lambda)} \downarrow & & \downarrow \partial \\ W(A) & \xrightarrow{\xi^1} & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}). \end{array}$$



ここで  $\partial : A[[T]]^\times \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$  は  $f(T) \mapsto f(X)f(Y)f(\lambda XY + X + Y)^{-1}$  で定義される cocycle map . このとき ,  $\xi^0$  と  $\xi^1$  は群準同型

$$\begin{aligned}\xi^0 : {}_{F^{(\lambda)}}W(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}); \mathbf{a} \mapsto E_p(\mathbf{a}, \lambda; T), \\ \xi^1 : W(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}); \mathbf{a} \mapsto F_p(\mathbf{a}, \lambda; X, Y)\end{aligned}$$

を誘導する . ここで  ${}_{F^{(\lambda)}}W(A)$  は  $F^{(\lambda)} : W(A) \rightarrow W(A)$  の核を意味する . このとき , 関口-諏訪 [3] の主結果は次のように述べられる .

**定理 4.1.3.** ([3, Th 2.19.1]) 群準同型

$$\begin{aligned}\xi^0 : {}_{F^{(\lambda)}}W(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}), \\ \xi^1 : W(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})\end{aligned}$$

は全単射 .

## 4.2. 証明の概略 ( 2 )

$A[\varepsilon]$  を双数の環 ( すなわち ,  $\varepsilon^2 = 2$  なる  $\varepsilon$  を  $A$  に添加した環 ) とする . まず , 加法群と乗法群を結びつけるために , 双数の環を介した群の完全列をいくつか定義する .

**4.2.1.** 群準同型  $A[[T]] \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times$  ,  $(A[\varepsilon][[T]])^\times \rightarrow A[[T]]^\times$  を , それぞれ  $f(T) \mapsto 1 + \varepsilon f(T)$  ,  $f(T) + \varepsilon g(T) \mapsto f(T)$  によって定義する . このとき ,

$$0 \rightarrow A[[T]] \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times \rightarrow A[[T]]^\times \rightarrow 0$$

は群の完全列 . さらに , 群準同型  $Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]})$  ,  $Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$  を , それぞれ  $f(X, Y) \mapsto 1 + \varepsilon f(X, Y)$  ,  $f(X, Y) + \varepsilon g(X, Y) \mapsto f(X, Y)$  で定義する . このとき ,

$$0 \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \rightarrow 0$$

は群の完全列 .

Augmentation homomorphism  $W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A)$  は  $(a_0 + b_0\varepsilon, a_1 + b_1\varepsilon, a_2 + b_2\varepsilon, \dots) \mapsto (a_0, a_1, a_2, \dots)$  で定義される . このとき ,

$$\text{Ker}[W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A)] = \{(b_0\varepsilon, b_1\varepsilon, b_2\varepsilon, \dots); b_i \in A \text{ for all } i \geq 0\}$$

は  $W(A[\varepsilon])$  の square null ideal で , 加法群として  $A^\mathbb{N}$  と同型 . 従って , 群の完全列

$$0 \rightarrow A^\mathbb{N} \rightarrow W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A) \rightarrow 0$$

を得る .

$F : W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A[\varepsilon])$  は  $A^\mathbb{N}$  の自己準同型  $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_1, pa_2, pa_3, \dots)$  を誘導する .  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots) \in W(A)$  とする . このとき ,  $F - \mathbf{c} : W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A[\varepsilon])$  は

$A^{\mathbb{N}}$  の自己準同型  $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_1 - \Phi_0(\mathbf{c})a_0, pa_2 - \Phi_1(\mathbf{c})a_1, pa_3 - \Phi_2(\mathbf{c})a_2, \dots)$  を誘導する．特に,  $F^{(\lambda)} : W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A[\varepsilon])$  は

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_{r+1} - \lambda^{p^{r+1}-p^r} a_r)_{r \geq 0}$$

を誘導する．これを  $\Phi$  と書く．

4.2.2.  $\Lambda$  を不定元とし,  $\mathbb{Q}[\Lambda]$  係数の形式冪級数  $L_p(\Lambda; T)$  と  $L_{p,r}(\Lambda; X, Y)$  を, それぞれ

$$L_p(\Lambda; T) = \frac{1}{\Lambda} \left\{ \log(1 + \Lambda T) - \frac{1}{p} \log(1 + \Lambda^p T^p) \right\},$$

$$L_{p,r}(\Lambda; X, Y) = \frac{1}{p\Lambda^{p^{r+1}}} \log \frac{(1 + \Lambda^{p^{r+1}} X^{p^{r+1}})(1 + \Lambda^{p^{r+1}} Y^{p^{r+1}})}{1 + \Lambda^{p^{r+1}}(X + Y + \Lambda XY)^{p^{r+1}}}$$

で定義する．単純な計算により

$$L_p(\Lambda; T) = \begin{cases} \sum_{(k,p)=1} \frac{(-\Lambda)^{k-1}}{k} T^k & (p > 2), \\ \sum_{(k,2)=1} \frac{\Lambda^{k-1}}{k} T^k - \sum_{(k,2)=1} \frac{\Lambda^{2k-1}}{k} T^{2k} & (p = 2) \end{cases}$$

となる．すなわち,  $L_p(\Lambda; T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[T]]$ . さらに,

$$\frac{(1 + \Lambda^{p^{r+1}} X^{p^{r+1}})(1 + \Lambda^{p^{r+1}} Y^{p^{r+1}})}{1 + \Lambda^{p^{r+1}}(X + Y + \Lambda XY)^{p^{r+1}}} \equiv 1 \pmod{p}$$

に注意すると  $L_{p,r}(\Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[X, Y]]$  であることもわかる．

4.2.3. 群準同型  $\xi^0 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A[[T]]$ ,  $\xi^0 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times$  を, それぞれ

$$\xi^0 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A[[T]]; \mathbf{a} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r})$$

$$\xi^0 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times; \mathbf{a} \mapsto E_p(\mathbf{a}, \lambda; T)$$

で定義する．さらに,  $\xi^1 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  と  $\xi^1 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]})$  を

$$\xi^1 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}); \mathbf{a} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_{p,r}(\lambda; X, Y)$$

$$\xi^1 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}); \mathbf{a} \mapsto F_p(\mathbf{a}, \lambda; X, Y)$$

で定義する．

以上の準備の下, 我々は次の補題を得る:

補題 4.2.4. 次の図式は可換．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A[[T]] & \longrightarrow & (A[\varepsilon][[T]])^\times & \longrightarrow & A[[T]]^\times & \longrightarrow & 0 \\
& & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & A^\mathbb{N} & \longrightarrow & W(A[\varepsilon]) & \longrightarrow & W(A) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \Phi & \downarrow \partial & \downarrow F^{(\lambda)} & \downarrow \partial & \downarrow F^{(\lambda)} & \downarrow \partial & \\
0 & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & A^\mathbb{N} & \longrightarrow & W(A[\varepsilon]) & \longrightarrow & W(A) & \longrightarrow & 0 \\
& & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \\
& & & & & & & & 
\end{array}$$

証明. ポイントとなるのは, 上で定義した  $E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T)$  と  $L_p(\Lambda; T)$ , また  $F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y)$  と  $L_{p,r}(\Lambda; X, Y)$  の間に次のような関係があることである (それほど自明ではない):

$$\begin{aligned}
E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T) &\equiv 1 + \sum_{r=0}^{\infty} U_r L_p(\Lambda^{p^r}; T^{p^r}) \pmod{(U_0, U_1, U_2, \dots)^2}, \\
F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y) &\equiv 1 + \sum_{r=0}^{\infty} U_r L_{p,r}(\Lambda; X, Y) \pmod{(U_0, U_1, U_2, \dots)^2}.
\end{aligned}$$

これより,  $\mathbf{b} = (a_0\varepsilon, a_1\varepsilon, a_2\varepsilon, \dots)$  とすると

$$\begin{aligned}
E_p(\mathbf{b}, \lambda; T) &= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (a_r\varepsilon) L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}) = 1 + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}), \\
F_p(\mathbf{b}, \lambda; X, Y) &= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (a_r\varepsilon) L_{p,r}(\lambda; X, Y) = 1 + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_{p,r}(\lambda; X, Y)
\end{aligned}$$

を得る. その他の部分については比較的容易に確かめられる.  $\square$

4.2.5.  $B = A[\varepsilon]$  とおき,  $\prod_{B/A}$  を Weil restriction functor とする. 分裂する形式群スキームの完全列

$$0 \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_{a,A} \rightarrow \left[ \prod_{B/A} \widehat{\mathbb{G}}_{m,B} \right]^\wedge \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_{m,A} \rightarrow 0$$

から, 長完全列

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{B\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \rightarrow 0, \\
0 &\rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

を得る. 上の補題と合わせ, 本稿最終ページの可換図式を得る. 従って, 関口-諏訪 [3] の主結果から,  $\xi^0 : \mathrm{Ker} \Phi \rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ ,  $\xi^1 : \mathrm{Coker} \Phi \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  は同型.

4.2.6.  $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$  とする. 任意の  $r \geq 0$  に対して  $\lambda^{p^{r+1}-p^r} a_r = pa_{r+1}$  が成り立つ

とき ,

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}) = \begin{cases} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[ \sum_{k=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{k} (-\lambda)^{k-p^r} T^k \right] \right] & (p > 2), \\ \left[ a_0 T - \sum_{r=1}^{\infty} a_r \left[ \sum_{k=2^r}^{2^{r+1}-1} \frac{2^r}{k} (-\lambda)^{k-2^r} T^k \right] \right] & (p = 2) \end{cases}$$

となることが示される . また , 任意の  $r \geq 0$  に対して

$$L_{p,r}(\Lambda; X, Y) = \frac{p^r}{(-\Lambda)^{p^{r+1}-1}} \sum_{k=1}^{p^{r+1}-1} \frac{(-\Lambda)^{k-1}}{k} \{X^k + Y^k - (X + Y + \Lambda XY)^k\}$$

と定義する . このとき ,  $H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$  の元として

$$[L_{p,r}(\lambda; X, Y)] = \begin{cases} [\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)] & (p > 2), \\ -[\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)] & (p = 2) \end{cases}$$

となることがわかる . これより , 群準同型

$$\begin{aligned} \eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}), \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \end{aligned}$$

の全単射性が導かれる .

## 参考文献

- [1] M.LAZARD, *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre*, Bulletin de la Société Mathématique de France 83 (1955), pp.251-274.
- [2] T.SEKIGUCHI, N.SUWA, *Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring I*, Journal of The Faculty of Science, the University of Tokyo, Sec.IA, Vol.38, No.1 (1991), pp.1-45.
- [3] T.SEKIGUCHI, N.SUWA, *A note on extensions of algebraic and formal groups, IV*, Preprint series, CHUO MATH No.48 (1999).
- [4] N.SUWA, *A letter to T.Sekiguchi* (1999).
- [5] B.WEISFEILER, *On a case of extensions of group schemes*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.248, No.1 (1979), pp.171-189.
- [6] —, *On the extensions of the formal group schemes  $\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}$  by  $\widehat{\mathbb{G}}_a$  over a  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algebra*, Preprint (2000).
- [DG] M.DEMAZURE, P.GABRIEL, *Groupes algébriques, Tome 1*, Masson-North-Holland (1970).
- [HZ] M.HAZEWINKEL, *Formal groups and applications*, Academic Press (1978).

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A[\varepsilon]\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker } \Phi & \longrightarrow & F^{(\lambda)}W(A[\varepsilon]) & \longrightarrow & F^{(\lambda)}W(A) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& 0 & \longrightarrow & A[[T]] & \longrightarrow & (A[\varepsilon][[T]])^\times & \longrightarrow & A[[T]]^\times & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \nearrow \xi^0 & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & W(A[\varepsilon]) & \longrightarrow & W(A) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \partial & \downarrow & \partial & \downarrow & \partial & \downarrow & \\
& 0 & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & W(A[\varepsilon]) & \longrightarrow & W(A) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & \longrightarrow & H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \longrightarrow & H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) & \longrightarrow & H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \nearrow \xi^1 & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Coker } \Phi & \longrightarrow & W(A[\varepsilon])/F^{(\lambda)} & \longrightarrow & W(A)/F^{(\lambda)} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & 
\end{array}$$