群スキームの Frobenius と Verschiebung 準同型

谷戸 光昭 (中大理工 D)

2001 年 8 月 30 日（木）

(題目が発表時の「群スキームの数論への応用」と異なっておりますが, 内容につきましては特に変更がないことをはじめにお断りしておきます.)

埼玉大の佐藤孝和先生のご講演で用いられる Verschiebung 準同型について基本的な事柄を紹介します. 第一節では introduction を兼ねて Frobenius 準同型について説明し, 第二節において Verschiebung の定義と性質を見ていきます. 最後にアーベル多様体の「ordinary」の定義を Verschiebung を用いて表します.

用いる記号ですが, この論説を通し p は素数, A を $\mathbb{F}_p$-代数とします. 環準同型 $\sigma : A \to A$ を $a \mapsto a^p$ で定義します. σ から定義される scheme の射 $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$ も同じ記号 σ で表すことにします.

1. Frobenius 準同型

一般に X を A-scheme とする. 今 A-scheme $X^{(p)}$ を次の fibre product により定義する:

$$\begin{array}{ccc} X^{(p)} := X \times_\sigma \operatorname{Spec} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} A & \xrightarrow{\sigma} & \operatorname{Spec} A. \end{array}$$

もし $X = \operatorname{Spec} R$ なら, $X^{(p)} = \operatorname{Spec}(R \otimes_\sigma A)$. ここで $R \otimes_\sigma A$ は, 任意の $\alpha, a \in A$, $x \in X$ に対して $\alpha x \otimes_\sigma a = x \otimes_\sigma \alpha^p a$ を満たす可換環で,

$$A \times R \otimes_\sigma A \to R \otimes_\sigma A; \quad (\alpha, x \otimes_\sigma a) \mapsto x \otimes_\sigma \alpha a$$

により A-代数の構造を持つ. X の Frobenius 写像 $F_X : X \to X^{(p)}$ は

$$F_X^* : R \otimes_\sigma A \to R; \quad x \otimes_\sigma a \mapsto a x^p$$

によって定義される. (特に X が A 上の group scheme なら, F_X は準同型になる.)

より具体的に

$$X = \operatorname{Spec} A[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_l), \quad f_i = \sum_I a_I T^I \quad \text{(multi-index)}$$

ならば

$$\begin{aligned} X^{(p)} &= \mathrm{Spec}\ (A[T_1,\dots,T_n]/(f_1,\dots,f_l)\otimes_\sigma A) \\ &\simeq \mathrm{Spec}\, A[T_1,\dots,T_n]/(f_1^{(p)},\dots,f_l^{(p)}). \end{aligned}$$

ここで, $f_i^{(p)} = \sum_I a_I^p T^I$. このとき Frobenius 写像 $F_X : X \to X^{(p)}$ は $F_X^* : T_i \mapsto T_i^p$ によって与えられる.

f_i を斉次多項式として Spec を Proj に置き換えても同様で, 例えば $p \neq 2,3$ として E が $y^2 = x^3 + ax + b$ で定義される elliptic curve ならば, $E^{(p)}$ は $y^2 = x^3 + a^p x + b^p$ で定義される elliptic curve で, Frobenius 準同型 $F_E : E \to E^{(P)}$ は $(x,y) \mapsto (x^p, y^p)$ によって定義される.

さて, E_1, E_2 を elliptic curve, $\phi : E_1 \to E_2$ を degree が $m(\geq 1)$ の isogeny とする. このとき, isogeny $\psi : E_2 \to E_1$ で

$$\begin{cases} \phi\circ\psi = [m]_{E_2} \\ \psi\circ\phi = [m]_{E_1} \end{cases}$$

を満たすものが一意的に存在することが知られている. ここで $[m]_{E_i}$ は E_i の m 倍写像を表す. この ψ を ϕ の dual isogeny という. (例えば [5, III, §6] を参照.) 特に $F_E : E \to E^{(p)}$ は degree が p の isogeny で, その dual isogeny を $V_E : E^{(p)} \to E$ と書き, これを E の **Verschiebung 準同型**という:

$$\begin{cases} F_E\circ V_E = [p]_{E^{(p)}} \\ V_E\circ F_E = [p]_E. \end{cases}$$

今, elliptic curve の Verschiebung 準同型を Frobenius 準同型の dual isogeny として定義したが, 一般に Verschiebung 準同型は (Frobenius とは独立に) flat commutative group scheme 上で直接定義することができ, 上で見たような性質 ($F\circ V = p$, $V\circ F = p$) を満たす. 特に finite group scheme 上では Frobenius と Verschiebung は互いに Cartier dual になる.

2. Vershiebung 準同型

まず Vershiebung 準同型の一般的な定義を与えることから始める. その後いくつかの例を挙げ, 後半にて特に重要と思われる性質を紹介する. 詳しくは [2, IV, §3, n°4] を参照されたい.

2.1. $G = \mathrm{Spec}\, R$ を A 上の affine flat commutative group scheme とする. p 階テンソルのなす A-加群 $R^{\otimes p}$ には, 各成分ごとの演算で A-代数の構造が入る. p 階の対称テンソル全体のなす部分 A-加群を $S^p R$ と書くと, これは自然に $R^{\otimes p}$ の部分 A-代数となる. A-加群としての準同型 $s : R^{\otimes p} \to S^p R$ を

$$x_1\otimes\cdots\otimes x_p \mapsto \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p} x_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\tau(p)}$$

によって定義する．ここで，$\mathfrak{S}_p$ は p 次の対称群．$s(R^{\otimes p})$ は S^pR のイデアルになる．このとき，A-準同型

$$R \otimes_\sigma A \to S^pR; \quad x \otimes_\sigma a \mapsto a(x \otimes \cdots \otimes x)$$

と自然な全射 $S^pR \to S^pR/s(R^{\otimes p})$ の合成

$$R \otimes_\sigma A \to S^pR/s(R^{\otimes p})$$

は A-同型．この事実は次の補題による:

補題 2.1.1. M を flat な A -加群とする．このとき，対応 $m \otimes_\sigma a \mapsto \overline{am^{\otimes p}}$ によって $M \otimes_\sigma A$ は $S^pM/s(M^{\otimes p})$ と同型.

証明の概略. 一般に A を環とすると，任意の flat な A-加群は有限生成自由 A-加群からなる帰納的系の極限として表せる (Lazard [3])．よって M を自由 A-加群としてよい．その基底を $\{m_i\}_{i\in I}$ とすると，群論の比較的初歩的な議論によって $\{\overline{m_i^{\otimes p}}\}_{i\in I}$ が $S^pM/s(M^{\otimes p})$ の自由基底になることがわかる．□

補注 2.1.2. 仮に A の標数が 0 ならば，$m^{\otimes p} = \dfrac{1}{p!}\, s(m^{\otimes p}) \in s(M^{\otimes p})$ となって上の対応は零射.

$G^p = \mathrm{Spec}\,(R^{\otimes p})$, $S^pG = \mathrm{Spec}\,(S^pR)$, $G^{(p)} = \mathrm{Spec}\,(R \otimes_\sigma A)$ とおく．G^p には $\mathfrak{S}_p$ が自然に作用する．全射 $S^pR \to S^pR/s(R^{\otimes p}) \simeq R \otimes_\sigma A$ から得られる自然な埋め込みを

$$i_G : G^{(p)} \hookrightarrow S^pG$$

と書く.

A-準同型 $\pi_p : G^p \to G$ を $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1 + \cdots + x_p$ によって定義する．π_p は $\mathfrak{S}_p$-不変なので，A-準同型 $\bar{\pi}^p : S^pG \to G$ が一意的に定まって，可換図式

$$\begin{tikzcd}
G^p \arrow[r, "\text{can.}"] \arrow[dr, "\pi_p"'] & S^pG \arrow[d, "\bar{\pi}_p"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

を得る．埋め込み $i_G : G^{(p)} \hookrightarrow S^pG$ によって $\bar{\pi}^p$ を $G^{(p)}$ に制限した準同型を V_G と書き，G の **Verschiebung 準同型**という: $V_G = \bar{\pi}_p|_{G^{(p)}}$.

$$\begin{tikzcd}
G^p \arrow[r, "\text{can.}"] \arrow[dr, "\pi_p"'] & S^pG \arrow[d, "\bar{\pi}_p"] & G^{(p)} \arrow[l, hook', "i_G"'] \arrow[dl, "V_G := \bar{\pi}_p|_{G^{(p)}}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

2.2. G が affine でない場合には，その貼り合わせが問題になる．各 affine piece 上では 2.1 と同様に Verschiebung を定義するのだが，説明の繰り返しを避けるために次の図式にて代替する．$h_{GU} : U \hookrightarrow G$ を G の affine open としている:

$$
\begin{tikzcd}
U^p \arrow[r, "\text{can.}"] \arrow[d, hook, "(h_{GU})^p"'] & S^pU \arrow[d, "\overline{\pi_p \circ (h_{GU})^p}"'] & U^{(p)} \arrow[l, hook', "i_G"'] \arrow[dl, "V_U := \overline{\pi_p \circ (h_{GU})^p}|_{U^{(p)}}"] \\
G^p \arrow[r, "\pi_p"] & G &
\end{tikzcd}
$$

もし $h_{UU'} : U' \hookrightarrow U$ ならば, $V_{U'}$ が $(h_{UU'})^{(p)} : U'^{(p)} \hookrightarrow U^{(p)}$ と V_U の合成になることは容易にわかる: $V_{U'} = V_U \circ (h_{UU'})^{(p)}$. これはすなわち $V_{U'} = V_U|_{U'^{(p)}}$ を意味する.

例 2.3. (1) $G = \mathbb{G}_{m,A} = \operatorname{Spec} A[T, T^{-1}]$ を multiplicative group scheme とすると, $G \simeq G^{(p)}$ となる. $\bar{\pi}_p$ は

$$\bar{\pi}_p^* : T \mapsto T^{\otimes p}$$

によって与えられる. 従って

$$V_G^*(T) = i_G^* \circ \bar{\pi}_p^*(T) = i_G^*(T^{\otimes p}) = T \otimes_\sigma 1 \simeq T.$$

ここで最後の同型は, $A[T, T^{-1}] \otimes_\sigma A \simeq A[T, T^{-1}]$ の同一視による. ゆえに $V_G = \mathrm{id}_G$. $\square$

(2) 一般に Γ を commutative group とし $G = D(\Gamma) = \operatorname{Spec} A[\Gamma]$ を diagonalizable group とすると, $G \simeq G^{(p)}$ となる. $\bar{\pi}_p$ は

$$\bar{\pi}_p^* : \gamma \mapsto \gamma^{\otimes p}$$

によって与えられる. 従って (1) と同様に $V_G = \mathrm{id}_G$. $\square$

(3) $G = \mathbb{G}_{a,A} = \operatorname{Spec} A[T]$ を additive group scheme とすると, $G \simeq G^{(p)}$ となる. $\bar{\pi}_p$ は

$$\bar{\pi}_p^* : T \mapsto \sum_{i=1}^{p} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \overset{i}{\check{T}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

によって与えられる. ところが

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \overset{i}{\check{T}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 &= \frac{1}{(p-1)!}\, s(T \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \\
&\equiv -s(T \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \mod p
\end{aligned}
$$

であるから,

$$V_G^*(T) = i_G^* \circ \bar{\pi}_p^*(T) = i_G^*(-s(T \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)) = 0.$$

ゆえに $V_G = 0$. $\square$

(4) $G = W_{2,A} = \operatorname{Spec} A[X_0, X_1]$ を長さ 2 の Witt group scheme とすると, $W_{2,A}^{(p)} = W_{2,A}$ となる. このとき, V_G が

$$V_G^* : X_0 \mapsto 0, \quad X_1 \mapsto X_0$$

によって与えられることをみよう. $R = A[X_0, X_1]$ とおく. R の余乗法 $\Delta : R \to R \otimes_A R$ は

$$
\begin{aligned}
&X_0 \mapsto X_0 \otimes 1 + 1 \otimes X_0, \\
&X_1 \mapsto X_1 \otimes 1 + 1 \otimes X_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} X_0^i \otimes X_0^{p-i}
\end{aligned}
$$

によって定義される．任意の $i \geq 2$ に対し，$\Delta_i : R \to R^{\otimes i}$ を

$$\Delta_2 = \Delta, \quad \Delta_{i+1} = (\Delta \otimes \mathrm{id}_R^{\otimes(i-1)}) \circ \Delta_i$$

によって帰納的に定義する．このとき，任意の $i \geq 2$ に対して

$$\Delta_i(X_0) = \sum_{j=1}^{i} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \overset{j}{\check{X}_0} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1,$$

$$\Delta_i(X_1) = \sum_{j=1}^{i} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \overset{j}{\check{X}_1} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 - \sum \frac{-1}{\alpha_1! \ldots \alpha_i!} X_0^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes X_0^{\alpha_i}$$

となる．ここで，下式右辺の第二項の和は，$\displaystyle\sum_{j=1}^{i} \alpha_j = p$ かつ $0 \leq \alpha_j < p$ なる $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ を渡る．さて，特に $i = p$ のときを考える．($\Delta_p = \bar{\pi}_p^*$ である.) まず，

$$\Delta_p(X_0) \equiv -s(X_0 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \mod p$$

であるから，(3) より直ちに $V_G^*(X_0) = 0$ が従う．一方，

$$\Delta_p(X_1) \equiv X_0^{\otimes p} \mod s(R^{\otimes p})$$

となることが計算により確かめられるので，

$$V_G^*(X_1) = i_G^* \circ \bar{\pi}_p^*(X_1) = i_G^*(X_0^{\otimes p}) = X_0 \otimes_\sigma 1 \simeq X_0$$

となる．□

Verschiebung (と Frobenius) 準同型にまつわる重要な性質をいくつか見ていく．まず，次の命題は基本的である．証明は容易なので省略する．

命題 2.4. G, H を A 上の flat commutative group scheme とする．このとき，次が成り立つ:

(1) 任意の group scheme の準同型 $f : G \to H$ に対し，図式

$$\begin{array}{ccc} G^{(p)} & \xrightarrow{f^{(p)}} & H^{(p)} \\ {\scriptstyle V_G}\downarrow & & {\scriptstyle V_H}\downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

は可換，

(2) 任意の A-代数 B に対し，$V_G \otimes_A B = V_{G \otimes_A B}$.

命題 2.5. G を A 上の flat commutative group scheme とする．このとき，

(1) $V_G \circ F_G = p \cdot \mathrm{id}_G$,

(2) $F_G \circ V_G = p \cdot \mathrm{id}_{G^{(p)}}$

が成り立つ.

証明. 簡単のため, G が affine であるとする. このとき, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\mathrm{diag}"'] \arrow[dr, "F_G"] & \\
G^p \arrow[r] \arrow[dr, "\pi_p"'] & S^pG \arrow[d, "\bar{\pi}_p"] & G^{(p)} \arrow[l, hook', "i_G"'] \arrow[dl, "V_G = \bar{\pi}_p|_{G^{(p)}}"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

ここで, $\mathrm{diag} : G \to G^p$ は $x \mapsto (x, \ldots, x)$ によって定義される対角化写像. すると, diag と π_p の合成が G の p 倍写像になることが容易にわかる. 従って $V_G \circ F_G = p \cdot \mathrm{id}_G$. 一方, 命題 2.4 (1) において $H = G^{(p)}$, $f = F_G$ とすると, (1) の結果から

$$F_G \circ V_G = V_{G^{(p)}} \circ F_G^{(p)} = V_{G^{(p)}} \circ F_{G^{(p)}} = p \cdot \mathrm{id}_{G^{(p)}}. \ \square$$

次の命題は, Frobenius と Verschiebung の Cartier Duality を示す際に有効である.

命題 2.6. G, H を A 上の flat commutative group scheme, K を A 上の commutative group scheme とし, $u : K \times G \to H$ を任意の双線型射とする. このとき, 任意の A-代数 R と $x \in K(R)$, $y \in G^{(p)}(R)$ に対し,

$$V_H(R)\left(u^{(p)}(R)(F_K(R)x, y)\right) = u(R)\,(x, V_G(R)y)$$

が成り立つ.

証明. 任意の A-代数 R と $x \in K(R)$, $y \in G^{(p)}(R)$ を取る. group scheme の準同型 $f : G_R \to H_R$ を, 任意の R-代数 S に対して

$$f(S) : G_R(S) \to H_R(S); \quad g \mapsto u_R(S)(x_S, g)$$

と定義する. σ' を R の p 乗写像とすると, $f^{(p)}(S) : G_R^{(p)}(S) \to H_R^{(p)}(S)$ は

$$g' \mapsto (u_R \times_{\sigma'} R)(S)\,((x \times_{\sigma'} R)_S, g') = (u_R^{(p)})(S)\,(F_K(S)x_S, g')$$

となる. 従って

$$V_H(R)\left(u^{(p)}(R)(F_K(R)x, y)\right) = V_H(R)(f^{(p)}(R)y) = f(R)(V_G(R)y) = u(R)\,(x, V_G(R)y)$$

となる. $\square$

系 2.7. G を A 上の flat commutative group scheme とする. このとき, 任意の A-代数 R と $x \in G(R)$, $y \in G^{(p)}(R)$ に対し,

$$V_G(R)\,(F_G(R)x \cdot y)) = x \cdot V_G(R)y$$

が成り立つ.

定理 2.8. G を A 上の finite flat commutative group scheme, $G^\vee = \underline{\mathcal{H}om}\,(G, \mathbb{G}_m)$ を G の Cartier Dual とする. このとき,

(1) $V_G^\vee = F_{G^\vee}$,
(2) $F_G^\vee = V_{G^\vee}$

が成り立つ.

証明. 命題 2.6 を適用するために, canonical な双線型 $u : G^\vee \times G \to \mathbb{G}_{m,A}$ を考える. このとき, 任意の A-代数 R と $x \in G^\vee(R)$, $y \in G^{(p)}(R)$ に対して

$$V_{\mathbb{G}_{m,A}}(R)\left(u^{(p)}(R)(F_{G^\vee}(R)x, y)\right) = u(R)\,(x, V_G(R)y) = x(V_G(R)y) = V_G^\vee(R)xy$$

が成り立つ. 一方, 例 2.3 の (1) により $V_{\mathbb{G}_{m,A}} = \mathrm{id}_{\mathbb{G}_{m,A}}$ だから,

$$V_{\mathbb{G}_{m,A}}(R)\left(u^{(p)}(R)(F_{G^\vee}(R)x, y)\right) = u^{(p)}(R)(F_{G^\vee}(R)x, y) = F_{G^\vee}(R)xy.$$

従って (1) が示せた. さらに (1) の結果から

$$F_G^\vee = (F_{G^{\vee\vee}})^\vee = (V_{G^\vee})^{\vee\vee} = V_{G^\vee}$$

を得る. □

3. Abelian variety の ”ordinary” の特徴づけ

k を標数 p の代数的閉体とし, X を k 上の abelian variety とする. $\dim X = g$ とする. X の p-torsion group $X[p]$ は k 上の finite group scheme で, 位数が p^{2g} になる. さらに finite group scheme として同型

$$X[p] \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r \times \boldsymbol{\mu}_p^r \times G_0$$

を得る. ここで, 右辺の各 finite group scheme の性質は次の通り:

	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$	$\boldsymbol{\mu}_p^r$	G_0
order	p^r	p^r	p^{2g-2r}
	étale	connected	connected
dual	connected	étale	connected
F	id	0	nilpotent
V	0	id	nilpotent

この分解に現れる r を X の p-rank という. p-rank は $0 \le r \le g$ の範囲を取りうるが, 特に g と一致するとき, すなわち $X[p] \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^g \times \boldsymbol{\mu}_p^g$ のとき, X は ordinary であるという. これを言い換えると,

$$\begin{aligned} X \text{ が ordinary} \quad &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad r = g \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\, V_{X[p]} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^g \\ &\Leftrightarrow \quad V_{X[p]} \text{ が étale (separable)} \end{aligned}$$

となる.

なお, 上記の表を作成するにあたっての論拠は次の通り: $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee \simeq \boldsymbol{\mu}_p$ であること, $F_{\boldsymbol{\mu}_p} = 0$, $V_{\boldsymbol{\mu}_p} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\mu}_p}$ (例 2.3 (1)) であること, および次の二つの命題 (3.1 と 3.2).

命題 3.1. k を標数 $p > 0$ の完全体, G を k 上の finite commutative group scheme とする. このとき, 次の条件はすべて同値:

(1) G は étale,
(2) $F_G = \mathrm{id}_G$,
(3) $V_{G^\vee} = \mathrm{id}_{G^\vee}$,
(4) $G^\vee$ は of multiplicative type.

ここで, 体 k 上の group scheme G が of multiplicative type であるとは, $G \otimes_k \bar{k}$ が diagonalizable group であること.

group scheme の of multiplicative type 性に関する criterion を紹介しておく: k を体, G を k 上の affine commutative group scheme とする. このとき, 次の条件はすべて同値:

(1) G は of multiplicative type,
(2) k の拡大体 K が存在して, $G \otimes_k K$ が diagonalizable group,
(3) $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{gr}}\big(G, \mathbb{G}_{a,A}\big) = 0$,
(4) 任意の線型表現 $G \to \mathrm{GL}_V$ (V は k-加群) に対して, $H^i(G, V) = 0$ $(i > 0)$,
(5) G の任意の線型表現は semi-simple,
(6) G の正規表現は semi-simple.

証明は [2, IV, §1, 2.2] を参照のこと. なお, 命題 3.1 の証明においては (1) と (3) の同値性を用いる.

命題 3.1 の証明. (2)⇔(3) 定理 2.8 による.
(1)⇔(4) 次の同値性による:

$$
\begin{aligned}
G \text{ は étale} &\Leftrightarrow G \otimes_k \bar{k} \text{ は constant group} \\
&\underset{\text{dual}}{\Leftrightarrow} G^\vee \otimes_k \bar{k} \text{ は diagonalizable group} \\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G^\vee \text{ は of multiplicative type.}
\end{aligned}
$$

(4)⇒(3) $G^\vee = G$ と置き直して示せば十分. G が of multiplicative type なら, $G \otimes_k \bar{k}$ は diagonalizable group. よって, 命題 2.4 (2) と例 2.3 (2) より $V_G \otimes_k \bar{k} = V_{G \otimes_k \bar{k}} = \mathrm{id}_{G \otimes_k \bar{k}}$ を得, $V_G = \mathrm{id}_G$ が従う.
(3)⇒(4) $G^\vee = G$ と置き直して示せば十分. k は標数 $p > 0$ の完全体なので, $G^{(p)} = G$. 命

題 2.4 (1) を $H = \mathbb{G}_{a,A}$ として適用すると, 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}\big(G, \mathbb{G}_{a,A}\big)$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \mathbb{G}_{a,A} \\ {\scriptstyle V_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle V_{\mathbb{G}_{a,A}}} \\ G & \xrightarrow{f} & \mathbb{G}_{a,A} \end{array}$$

は可換. 仮定 $V_G = \mathrm{id}_G$ と $V_{\mathbb{G}_{a,A}} = 0$ (例 2.3 (3)) から, $f = 0$. 従って G は of multiplicative type. □

命題 3.2. k を標数 $p > 0$ の完全体, G を k 上の finite commutative group scheme とする. このとき, 次の条件はすべて同値:

(1) G は connected,
(2) F_G は nilpotent,
(3) $V_{G^\vee}$ は nilpotent,
(4) $G^\vee$ は unipotent.

ここで, 体 k 上の affine group scheme G が unipotent であるとは, G が of multiplicative type な non-trivial 部分群を持たないこと.

証明. (2)⇔(3) 定理 2.8 による.
(1)⇔(4) もし G が connected でなければ, G の non-trivial で étale な部分群 $\pi_0 G$ が存在する. 命題 3.1 より $(\pi_0 G)^\vee$ は $G^\vee$ の non-trivial な部分群で of multiplicative type. すなわち, $G^\vee$ は unipotent ではない. 逆も同様.
(3)⇔(4) $G^\vee = G$ と置き直して示せば十分. G を unipotent とすると, 部分群の列

$$e = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$$

で H_{i+1}/H_i が $\mathbb{G}_{a,A}$ の部分群となるようなものが存在する. $V_{\mathbb{G}_{a,A}} = 0$ (例 2.3 (3)) より, H_{i+1}/H_i 上でも $V = 0$. よって $V_G^n = 0$ が従う. 逆に, もし G が unipotent でなければ, G の non-trivial な部分群 H で of multiplicative type なものが存在する. 命題 3.1 より $V_H = \mathrm{id}_H$. すなわち V_G は nilpotent になり得ない. □

References

[1] M.Demazure, *Lectures on p-Divisible Groups*, Springer-Verlag, LNM 302, 1972.
[2] M.Demazure, P.Gabriel, *Groupes algébriques, Tome 1*, Masson-North-Holland, 1970.
[3] M.Lazard, *Sur les modules plats*, C. R. Acad. Sc. Paris, t.258, 1964, p.6313-6316.
[4] D.Mumford, *Abelian Variety*, Oxford university Press : Oxford, 1970.
[5] J.Silverman, *The Arithmetic of elliptic curves*, Springer-Verlag, GTM 106, 1986.
[6] W.Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes*, Springer-Verlag, GTM 66, 1979.

谷戸 光昭 — Mitsuaki YATO
中央大学大学院理工学研究科数学専攻博士後期課程
112-8551 東京都文京区春日 1-13-27
e-mail: yato@grad.math.chuo-u.ac.jp